

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем
(МКМ-2024)**

*Сборник статей по материалам
XVIII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 4–7 июня 2024 г.

Под редакцией
кандидата физико-математических наук,
доцента А. Н. Тынды

**Mathematical and Computer Modelling
of Natural Science and Social Problems (MCM-2024)**

*Proceedings of the Eighteen Russian Conference
with international participation*

Penza, Russian Federation, 4–7 June, 2024

Edited by
A. N. Tynda

Пенза • Издательство ПГУ • 2024

УДК 51
ББК 22.1
М34

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем (МКМ-2024) : сб. ст. по материалам XVIII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 4–7 июня 2024 г.) / под ред. канд. физ.-мат. наук, доц. А. Н. Тынды. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2024. – 342 с.

ISBN 978-5-907807-90-7

Отражены основные результаты работы конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теорию приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, демографии, социальных наук; математические модели в физике и технологиях; нейроматематику и нейрокомпьютеры; информационные технологии в образовании.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» ПГУ и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 22.1

Программный комитет

А. Н. Тында, к.ф.-м.н., доцент (ПГУ, г. Пенза) – *председатель*; **Р. В. Жалнин**, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. Н. П. Огарёва, г. Саранск) – *заместитель председателя*; **Д. В. Артамонов**, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза); **И. В. Бойков**, д.ф.-м.н., профессор (ПГУ, г. Пенза); **А. А. Варганов**, генеральный директор (НТП «Криптософт», г. Пенза); **В. И. Горбаченко**, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза); **И. М. Губайдуллин**, д.ф.-м.н., профессор (ИНК УФИЦ РАН, г. Уфа); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (ПГУ, г. Пенза); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза); **П. С. Мартышко**, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (УФУ, г. Екатеринбург); **Д. Н. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор, профессор РАН (БИ БРИКС, ИрНИТУ, г. Иркутск); **Н. А. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор (ИГУ, г. Иркутск); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (ПГУ, г. Пенза); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. Н. П. Огарёва, г. Саранск); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза); **Е. В. Чистякова**, к.ф.-м.н., доцент (ИДСиТУ им. В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза);
Е. В. Яницкий (РИИ Huawei, г. Москва)

Ответственный секретарь конференции

Л. А. Купряшина, к.пед.н., доцент (ПГУ, г. Пенза)

П р и к а з

о проведении XVIII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (МКМ-2024)
№ 356/о от 11.04.2024

ISBN 978-5-907807-90-7

© Пензенский государственный университет, 2024

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 517.983.5

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Руслан Рустамович Галиакберов¹, Сергей Сергеевич Орлов²,
Денис Николаевич Сидоров³

^{1,3}Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

^{2,3}Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

³Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН,
Иркутск, Россия

¹ruslan10651999@gmail.com, ²orlov_sergey@inbox.ru,

³contact.dns@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Представлен критерий существования и единственности периодического решения рассматриваемой начальной задачи. Указаны явная формула периодического решения и его основной период.

Ключевые слова: вещественное банахово пространство, дифференциально-операторное уравнение, периодическое решение, основной период

PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACE

Ruslan R. Galiakberov¹, Sergei S. Orlov², Denis N. Sidorov³

^{1,3}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

^{2,3}Irkutsk State University, Irkutsk, Russia

³Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

¹ruslan10651999@gmail.com, ²orlov_sergey@inbox.ru,

³contact.dns@gmail.com

Abstract. The Cauchy problem for a first order differential operator equation in a Banach space is considered. A criterion for the existence and uniqueness of a periodic solution of the initial value problem under consideration is given. An explicit formula for the periodic solution and its fundamental period are obtained.

Keywords: real Banach space, abstract differential equation, periodic solution, fundamental period

Пусть E – вещественное банахово пространство, $\mathbf{B}(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов из E в E . Рассматривается задача Коши

$$u'(t) - Au(t) = f(t), \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2)$$

где $A \in \mathbf{B}(E)$ функции $u : \mathbb{R} \rightarrow E$ и $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ вещественного аргумента t и со значениями в E – искомая и заданная соответственно, элемент $u_0 \in E$ задан. Изучается проблема существования периодических решений рассматриваемого класса (1) дифференциально-операторных уравнений. В частности, требуется описать множество операторных коэффициентов A , свободных функций f и начальных значений u_0 , при котором классическое решение начальной задачи (1), (2) окажется T -периодическим. Под *классическим* решением этой задачи понимается сильно непрерывно дифференцируемая на луче $[0; +\infty)$ функция u , которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

Стандартным подходом к изучению существования периодических решений абстрактного дифференциального уравнения (1) является рассмотрение так называемой *периодической краевой задачи* с граничным условием

$$u(0) = u(T),$$

где T – предполагаемый период периодического решения (см. монографию статья [1, с. 124–129] и статью [2]). Исследование разрешимости этой задачи приводит к естественному ограничению: *спектр $\sigma(A)$ линейного оператора A не должен содержать точек мнимой оси, где $k \in \mathbb{Z}$.*

$$\frac{2k\pi i}{T}$$

Из последнего условия в частности следует, что равномерно ограниченная полугруппа операторов $\exp At$, порождаемая таким инфинитезимальным генератором A , не является *периодической* (см. обзор [3, с. 147]). При таком подходе единственность периодического решения требуется доказывать отдельно, его основной период может оказаться меньше предполагаемого T в постановке периодической краевой задачи, а получаемые условия существования периодического с периодом T решения носят лишь достаточный характер.

В представляемой заметке формулируется другой подход к построению периодического решения абстрактного дифференциального уравнения (1). Предлагается рассматривать не краевую, а начальную задачу с начальными условиями (2), которая, как известно, имеет единственное классическое решение при любой сильно непрерывной правой части. Проблема исследования состоит в описании набора входных данных (начальных значений, операторных коэффициентов и свободных функций), при которых классическое решение начальной задачи (1), (2) окажется T -периодическим. Такая постановка проблемы исследования хорошо согласуется с приложениями, а именно, следует установить множество начальных состояний, краевых режимов и внешних возмущений, при которых описываемый соответствующим эволюционным уравнением процесс будет иметь колебательную динамику с основным периодом T .

Следующие две теоремы из теории функций со значениями в абстрактных пространствах лежат в основе проведённого исследования функционального свойства периодичности классического решения начальной задачи (1), (2).

Лемма 1. Всякая сильно непрерывно дифференцируемая T -периодическая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ имеет T -периодическую производную.

Лемма 2. Всякая сильно непрерывная периодическая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ является либо постоянной, либо имеет основной период.

Применяя лемму 1, можно получить необходимое условие периодичности классического решения рассматриваемой задачи Коши: *если начальная задача (1), (2) имеет периодическое с периодом T классическое решение, то правая часть f также является периодической с периодом T* . Из леммы 2 следует, что постоянство как вырожденный случай периодичности следует рассматривать отдельно. Далее представлены результаты для T -периодической правой части уравнения (1).

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{B}(E)$, а $f \in \mathcal{C}([0; +\infty); E)$ является T -периодической. Тогда для того, чтобы классическое решение начальной задачи (1), (2) было T -периодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$(\mathbb{I} - \exp AT)u_0 = \int_0^T \exp A(T-s)f(s)ds,$$

причем это решение единственно и задается формулой

$$u(t) = \exp At u_0 + \int_0^t \exp A(t-s)f(s)ds,$$

где $\mathbb{I}$ – тождественный оператор в E , а $\exp At$ – операторная экспонента.

В отличие от теоремы Далецкого – Крейна [1, с. 127] в представленной теореме ограничения на спектр операторного коэффициента A отсутствуют, и она носит необходимый и достаточный характер. Приведём иллюстрирующий пример двумерной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно трактовать как дифференциальное уравнение в банаховом пространстве $\mathbb{R}^2$.

Пример. Пусть $E = \mathbb{R}^2$, линейный оператор A в классическом базисе Гамеля в $\mathbb{R}^2$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда спектр $\sigma(A) = \{\pm i\}$ состоит из точек мнимой оси, а

$$\exp At = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Начальная задача (1), (2) такая, что

$$f(t) = \begin{pmatrix} 2\beta \cos t \\ -2\beta \sin t \end{pmatrix} \text{ и } u_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

имеет единственное 2π -периодическое решение

$$u(t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos t + \beta \sin t \\ \alpha \sin t + \beta \cos t \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет ослабить указанные выше ограничения на спектр оператора A , доказать критерий периодичности решения начальной задачи (1), (2) и указать основной период решения.

Список литературы

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970.
2. Eidelman Y. S., Tikhonov I. V. On periodic solutions of abstract differential equations // Abstract and Applied Analysis. 2001. Vol. 6, № 8. P. 489–499.
3. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия: Математический анализ. 1990. Т. 28. С. 87–202.

РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СИСТЕМЕ АКУСТИЧЕСКИ МЯГКИХ ЭКРАНОВ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Владислав Олегович Нестеров

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

nesterovvlad0_o@mail.ru

Аннотация. Решается скалярная задача дифракции на системе акустически мягких экранов методом Галеркина.

Ключевые слова: трехмерная скалярная задача дифракции, мягкие экраны, метод Галеркина

SOLVING THE SCALAR DIFFRACTION PROBLEM ON A SYSTEM OF ACOUSTICALLY SOFT SCREENS USING THE GALERKIN METHOD

Vladislav O. Nesterov

Penza State University, Penza, Russia

nesterovvlad0_o@mail.ru

Abstract. A scalar scattering problem is solved on a system of acoustic soft screens using the Galerkin method.

Keywords: three-dimensional scalar diffraction problem, soft screens, Galerkin method

Математическая постановка задачи

Рассмотрим в однородном пространстве $\mathbb{R}^3$, характеризующимся постоянным волновым числом, систему попарно непересекающихся экранов Ω ,

$$u_0(x) = \exp^{ik_e(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)}, x \in \mathbb{R}^3,$$

Пусть u_0 – падающая плоская волна, направление падения которой задается единичным вектором (α, β, γ) . Требуется определить всюду за исключением края экрана полное поле $u(x)$ удовлетворяющее условиям гладкости

$$u \in C^2((\bar{\Omega})^c) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_+ \setminus \Omega_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_- \setminus \Omega_\delta),$$

уравнению Гельмгольца вне экранов, $\Delta u(x) + k_e^2 u(x) = 0, x \in (\bar{\Omega})^c$, краевому условию Дирихле во внутренних точках экрана Ω : $u|_{\Omega} = 0$, условиям конечности энергии: $u \in H_{loc}^1((\bar{\Omega})^c)$ и условиям излучения Зоммерфельда для рассеянного поля $u_s := u - u_0$:

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_e u_s + o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r := |x| \rightarrow \infty.$$

Интегральные уравнения задачи дифракции

Краевая задача дифракции может быть сведена [1, 4, 5] к интегральному уравнению по поверхности экрана

$$-\int_{\Omega} G(r) \varphi(y) ds_y = u_0(x), x \in \Omega,$$

где $G(r) \equiv G(x, y) = \frac{e^{ik_e r}}{4\pi r}, r = |x - y|$, или в операторной форме:

$S_{\varphi} = u_0|_{\Omega}$. Оператор $S_{\varphi} = \int_{\Omega} G(r) \varphi(y) ds_y, x \in \Omega$ – слабосингулярный интегральный оператор на Ω . Будем рассматривать его в следующих пространствах:

$$S : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega),$$

$$H^s(\Omega) := \{u|_{\Omega} : u \in H^s(M)\},$$

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \{u \in H^s(M) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega}\} \text{ [2, 3].}$$

Метод Галеркина

Для приближенного решения уравнения

$$Sf = u_0, S : H_1 \rightarrow H_2$$

будем использовать метод Галеркина, согласно которому приближенное решение ищется в виде линейной комбинации базисных функций, а коэффициенты в этом разложении находятся из СЛАУ

$$\sum_{i=1}^N c^j \langle S w_j, w_i \rangle = \langle u_0, w_i \rangle, i = 1, \dots, N.$$

Для сходимости МГ необходимо выполнение условия аппроксимации:

$$\forall f \in H_1 \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{f_N \in H_{1,N}} \|f - f_N\| \rightarrow 0.$$

Приближенные решения φ_n будем искать в виде

$$\varphi_n(x) := \sum_{i=1}^n c_{\varphi}^i \psi_i(x), x \in \Omega.$$

Определим сначала базисные функции на плоском экране. Разобьем экран на прямоугольные конечные элементы $\pi_{i_1 i_2}$, вводя на Ω равномерную сетку узлов

$$x_{1,i_1} = b_1 + \frac{b'_1 - b_1}{n_1} i_1, x_{2,i_2} = b_2 + \frac{b'_2 - b_2}{n_2} i_2.$$

Тогда базисные функции определяются формулой

$$\psi_i(x) = \psi_{i_1 i_2}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\pi}_{i_1 i_2} \\ 0, & x \notin \bar{\pi}_{i_1 i_2} \end{cases}.$$

В данной работе рассматриваются системы неплоских параметрически заданных экранов. Для таких экранов разбиваем область параметров на прямоугольные конечные элементы, а носители кусочно-постоянных базисных функций определяем как образы этих плоских конечных элементов при заданной параметризации (рис. 1, 2).

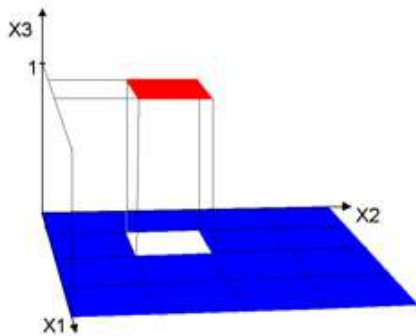


Рис. 1. Базисные функции на плоском экране

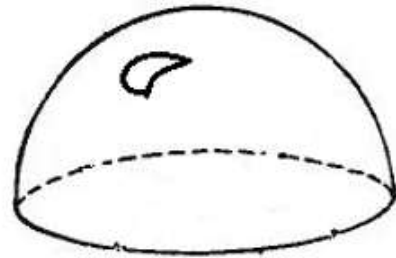


Рис. 2. Базисные функции на неплоском экране

Нетрудно доказать, что введенные базисные функции действительно удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве решений задачи.

Определение матрицы СЛАУ в методе Галеркина

Описанный метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений $[\hat{L}]u = u_0$, $u = (c_{\varphi}^1, \dots, c_{\varphi}^n)^T$, где u – вектор-столбец неизвестных коэффициентов, $[S]$ – основная матрица СЛАУ, u_0 – столбец правой части. Расширенная матрица имеет вид $\begin{bmatrix} [S] & [u_0] \end{bmatrix}$.

Элементы основной матрицы вычисляются согласно МГ по формулам

$$S_{ij} = (S\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} S\varphi_j(x)\varphi_i(x)ds_x = \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y)\varphi_j(y)ds_y\varphi_i(x)ds_x.$$

Так как в рассматриваемой задаче базисные функции являются финитными кусочно-постоянными, то необходимо выполнять интегрирование только по носителю базисной функции, то есть по формулам

$$S_{ij} = - \int_{w_i} \int_{w_j} G(x, y)ds_y ds_x.$$

Элементы столбца правой части СЛАУ вычисляются согласно методу Галеркина по формулам

$$[u_0]_i = \int_{\Omega} u_0(x)\varphi_i(x)ds_x = \int_{w_i} u_0(x)ds_x.$$

Эти интегралы являются слабосингулярными и могут быть вычислены с произвольной точностью методом прямоугольников с выбрасыванием особых точек подынтегральной функции. Все интегралы, определяющие правую часть СЛАУ, являются собственными.

Результаты работы программы

В качестве результатов покажем сначала результаты решения задачи на плоском экране с использованием двух расчетных сеток (рис. 3 и 4).

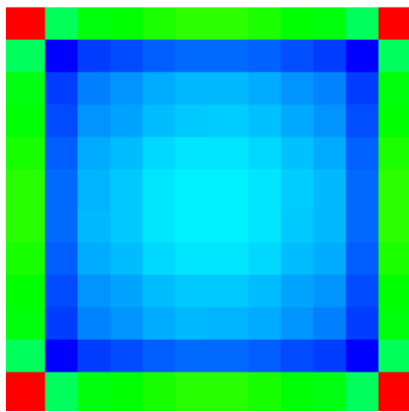


Рис. 3. Один плоский экран с числом разбиений $n = 12$

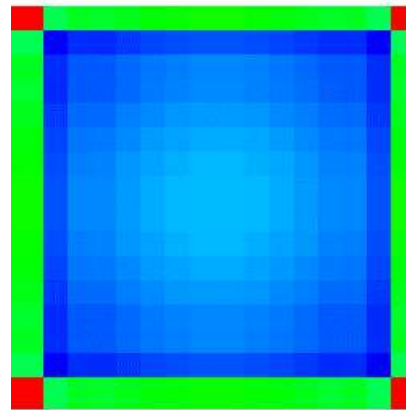


Рис. 4. Один плоский экран с числом разбиений $n = 16$

На рис. 5 представлена дифракционная картина, отвечающая решению задачи рассеяния плоской волны на системе двух неплоских экранов: на рисунке изображены плотности интегралов (это решения интегрального уравнения) и модуль полного поля вне экранов.

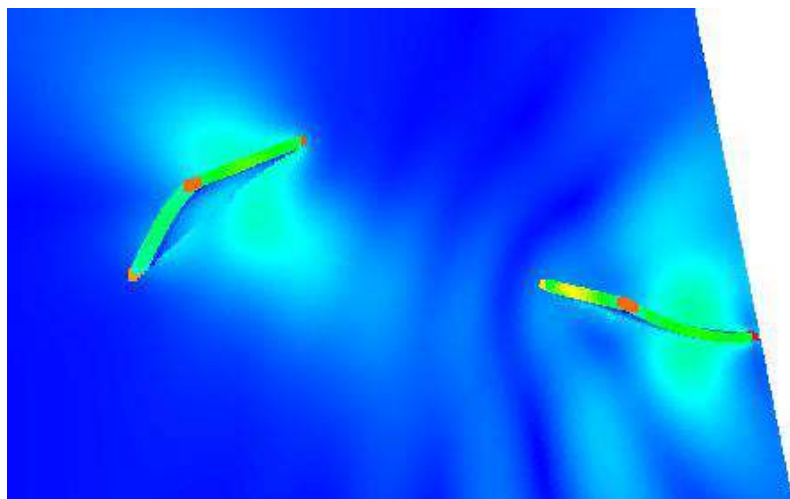


Рис. 5. Поле вне экранов и решения на экранах с числом разбиений $n = 16$

Список литературы

1. Stephan E. P. Boundary integral equations for screen problems in R^3 // *Integral equations and potential theory*. 1987. Vol. 10, № 10. P. 236–257.
2. Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М. : МЦНМО, 2013. 379 с.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
4. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014. Т. 54, № 8.
5. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел : монография. М. : КноРус, 2016.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ

Олег Сергеевич Скворцов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
ghj.ghh.13@mail.ru

Аннотация. Решается трехмерная, векторная задача дифракции на шаре методом коллокации.

Ключевые слова: трехмерная задача, векторная задача, задача дифракции, тело, система уравнений Максвелла, метод коллокации, метод Гаусса, шарообразное тело, кубическая сетка

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE VECTOR DIFFRACTION PROBLEM ON AN INHOMOGENEOUS SPHERE

Oleg S. Skvortsov

Penza State University, Penza, Russia
ghj.ghh.13@mail.ru

Abstract. A three-dimensional vector diffraction problem on a ball is solved by the collocation method.

Keywords: three-dimensional problem, vector problem, diffraction problem, body, Maxwell's equation system, collocation method, Gauss method, spherical body, cubic grid

Введение

В работе описан численный векторной задачи рассеяния монохроматической электромагнитной волны препятствием, состоящим из объемного тела. Теоретическому исследованию этой задачи посвящены [1–4].

Изучение и анализ распространения электромагнитных волн в является важной задачей в области электродинамики и волновой физики.

Дифракция электромагнитной волны оказывает влияние на многие системы связи и передачи данных, что только подтверждает актуальность решений задач, связанных с огибанием электромагнитной волны препятствий. Благодаря открытию дифракции связь становится все более качественной, а передача информации быстрее. В медицине

позволяет получать «срезы» тела человека с помощью электромагнитных волн и называется дифракционной томографией.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ задачу рассеяния электромагнитных волн объёмным телом Q .

Если тело является неоднородным, то решение задачи сводится [1] к интегральному уравнению (1).

$$\mathbf{E}(x) - (k_e^2 + \text{grad}_x \text{div}_x) \int_Q G(x, y) [\hat{\varepsilon}_r - \mathbf{I}] \mathbf{E}(y) dV_y = \mathbf{E}_0(x), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$ – полное поле, $\mathbf{E}_0 = (0, e^{ik_e x_1}, 0)^T$ – падающая волна; k_e – волновое число свободного пространства, $\hat{\varepsilon}_r = \frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_e}$; ε_e – диэлектрическая проницаемость свободного пространства, $G(x, y) = \frac{e^{ik_e |x-y|}}{4\pi |x-y|}$. Электрическое

поле гармонически зависит от времени как $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}(x) e^{-i\omega t}$.

2. Дискретизация задачи

При решении задачи методом коллокации необходимо построить равномерную расчётную сетку и набор конечных прямоугольных элементов внутри области $Q \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Так же введём трёхиндексную нумерацию $j = (j_1, j_2, j_3)$, тогда конечные элементы представляют собой набор параллелепипедов согласно формуле:

$$D_{j_1, j_2, j_3} = [x_{1, j_1}; x_{1, j_1+1}] \times [x_{2, j_2}; x_{2, j_2+1}] \times [x_{3, j_3}; x_{3, j_3+1}], \quad (2)$$

где $(j_1 = \overline{0, n-1}, j_2 = \overline{0, n-1}, j_3 = \overline{0, n-1})$, $x_{k, j_k} = a_k + j_k h_k$, $h_k = \frac{b_k - a_k}{n}$.

Определим финитные кусочно-постоянные базисные функции согласно формулам:

$$\mu_{j_1, j_2, j_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_{j_1, j_2, j_3}, \\ 0, & x \notin D_{j_1, j_2, j_3}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_j^{(1)} = (\mu_j, 0, 0)^T, \mathbf{v}_j^{(2)} = (0, \mu_j, 0)^T, \mathbf{v}_j^{(3)} = (0, 0, \mu_j)^T.$$

Метод коллокации для решения уравнения (1) приводит к СЛАУ вида:

$$[A] \bar{x} = \bar{b},$$

где

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_{j_1, j_2, j_3}^{(l)}(\xi_{i_1, i_2, i_3}) - (k_e^2 + \text{grad}_x \text{div}_x) \times \\ & \times \int_{Q_{j_1, j_2, j_3}} G(\xi_{i_1, i_2, i_3}, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(\xi_{i_1, i_2, i_3})}{\varepsilon_e} - \mathbf{I} \right] \mathbf{v}_{j_1, j_2, j_3}^{(l)}(y) dV_y, \\ & b_i = \mathbf{E}_0(\xi_{i_1, i_2, i_3}), \end{aligned} \quad (4)$$

где под ξ_{i_1, i_2, i_3} будем понимать точку коллокации, вычисленную по следующей формуле

$$\xi_{i_1, i_2, i_3} = (a_1 + (i_1 + 0.5)h_1, a_2 + (i_2 + 0.5)h_2, a_3 + (i_3 + 0.5)h_3).$$

3. Внутренняя сходимость

Рассмотрим внутреннюю сходимость полученной модели. Выведем модуль и вещественную часть для $|\mathbf{E}|$ при $\nu = 15$ ГГц, $R = 0.5\lambda$, $\hat{\varepsilon}_r = 5 + 2i$.

На рисунке 1 видим наличие внутренней сходимости приближённого решения. На рисунке 2 видим равномерное распределение интенсивности электрического поля по всему объёму шара.

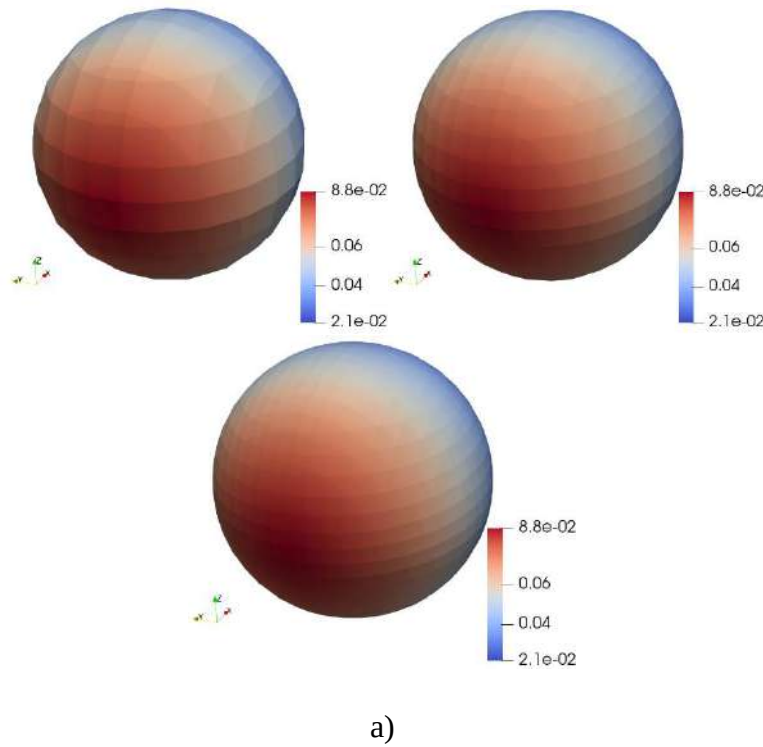


Рис. 1. Модуль (а) и вещественная часть (б) $|\mathbf{E}|$ при $n = 12, 18, 24$ соответственно. Вид снаружи (начало)

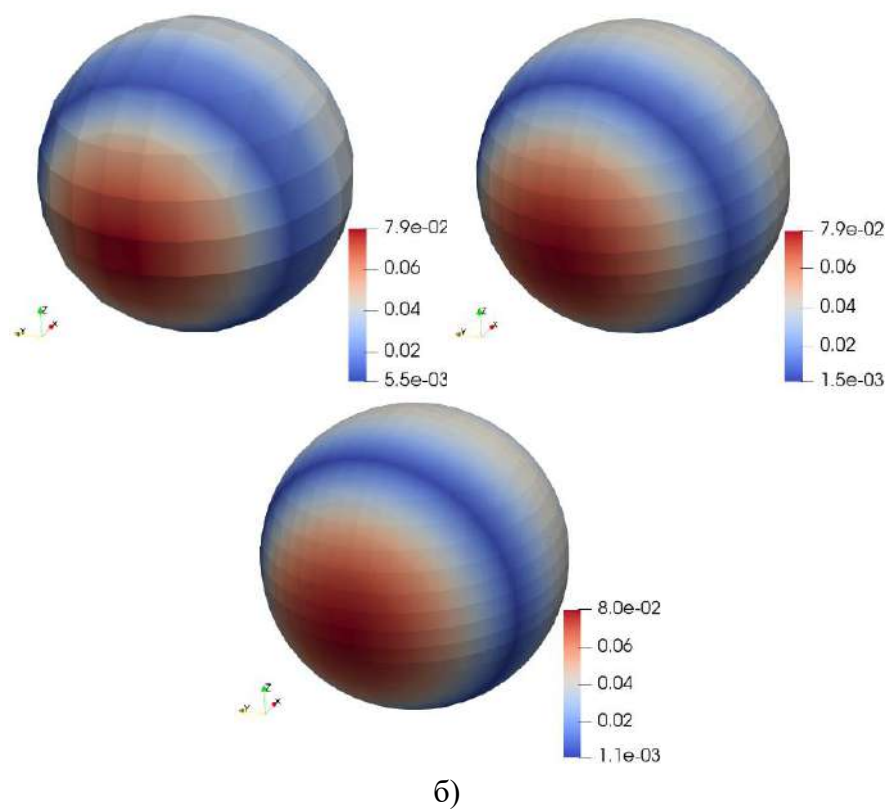


Рис. 1. Модуль (а) и вещественная часть (б) $|\mathbf{E}|$ при $n = 12, 18, 24$ соответственно. Вид снаружи (окончание)

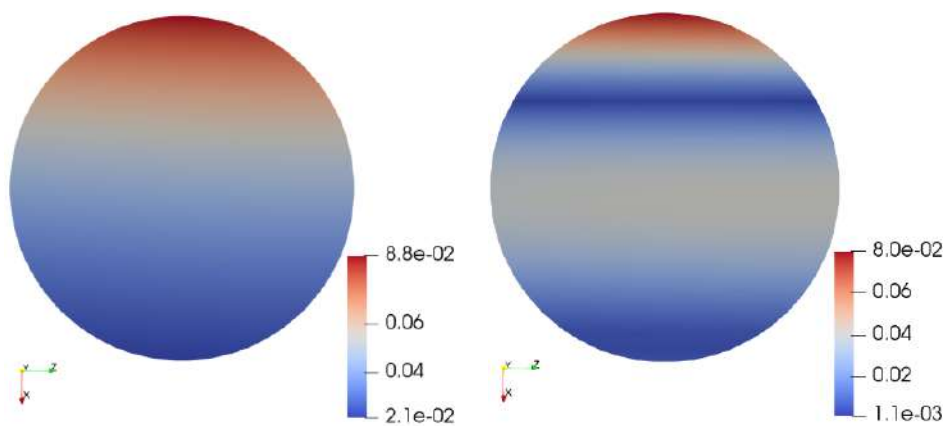


Рис. 2. Модуль и вещественная часть $|\mathbf{E}|$ соответственно при $n = 24$. Вид в разрезе

4. Численные результаты

Рассмотрим неоднородный случай. Выберем $\hat{\varepsilon}_r = \begin{cases} 5 + 2i, & x_2 < 0, \\ 2, & x_2 \geq 0, \end{cases}$ и рассмотрим модуль и вещественную часть $|\mathbf{E}|$.

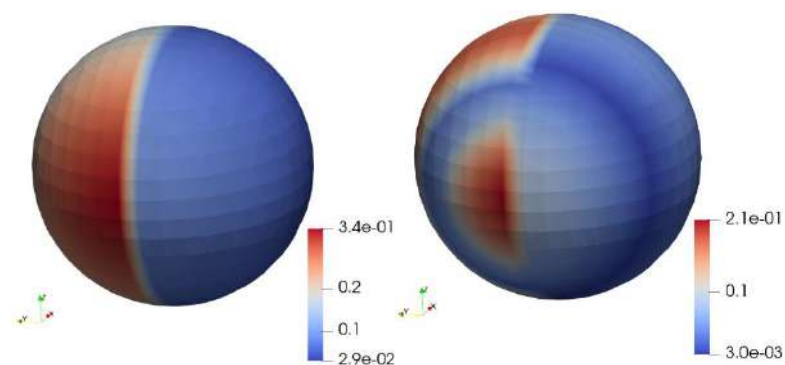


Рис. 3. Модуль и вещественная часть $|E|$ соответственно при $n = 18$.
Вид снаружи

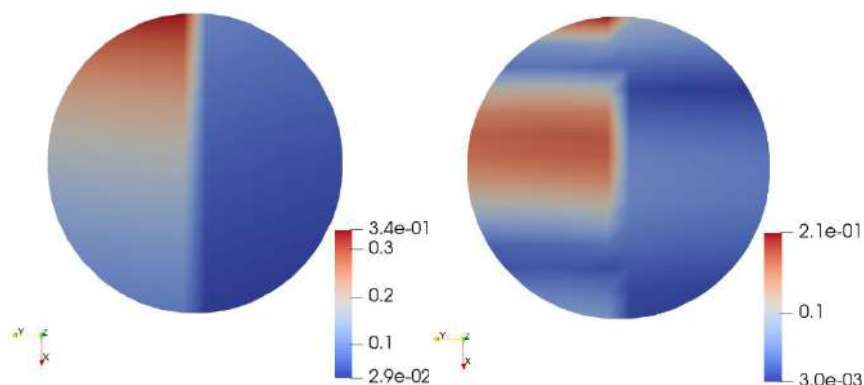


Рис. 4. Модуль и вещественная часть $|E|$ соответственно при $n = 18$.
Вид в разрезе

На рисунке 3 и 4 видим резкое изменение интенсивности в области перехода одной диэлектрической проницаемости в другую. Видим, что область с наибольшей диэлектрической проницаемостью ведёт себя более похоже на металл, в сравнении с меньшей диэлектрической проницаемостью, что указывает на физическую обоснованность построенной модели.

Заключение

В данной работе описано решение векторной трёхмерной задачи дифракции на шарообразном теле методом коллокации. Показана внутренняя сходимость построенного метода, показана физическая обоснованность полученной модели.

Список литературы

1. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М., 1998.
2. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : ИИЦ ПензГУ, 2009.

3. Смирнов Ю. Г., Цупак Д. А. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2252–2267.

4. Смирнов Ю. Г., Цупак Д. А. Существование и единственность решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче дифракции // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1190–1197.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Илья Алексеевич Висков¹,
Дмитрий Александрович Стеклянный²,
Наталья Юрьевна Скибицкая³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹kamaz58russ@mail.ru, ²z7molni7z@gmail.com,

³natalia.skibitskaya@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается физический процесс промерзания грунта с подвижной границей. С помощью математического моделирования дифференциального уравнения теплопроводности, с использованием численных методов к поставленной задаче, были получены данные о распределении температуры грунта в зависимости от толщины слоя в различные моменты времени.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, разностная схема, слой грунта, распределение температуры

MATHEMATICAL MODELING OF THE EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY WITH A MOVABLE BOUNDARY

Ilya A. Viskov¹, Dmitry A. Steklyannikov²,
Natalia Yu. Skibitskaya³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹kamaz58russ@mail.ru, ²z7molni7z@gmail.com,

³natalia.skibitskaya@yandex.ru

Abstract. The article considers the physical process of soil freezing with a movable boundary. Using mathematical modeling of the differential equation of thermal conductivity, using numerical methods for the task, Data were obtained on the distribution of soil temperature depending on the thickness of the layer at different points in time.

Keywords: thermal conductivity equation, difference scheme, soil layer, temperature distribution

Изучение процессов теплообмена играет огромную роль в науке и технике. В последние годы данное направление интенсивно разви-

вается. Теоретическое исследование процессов теплообмена в настоящее время основано на их численном моделировании с использованием ЭВМ. Это стало возможным благодаря значительному прогрессу в развитии вычислительных методов решения задач для уравнений в частных производных и увеличению мощности современных вычислительных машин. Численное моделирование процессов теплообмена широко используется, в связи с тем, что для современной науки и техники необходим достоверный прогноз таких процессов, экспериментальное изучение которых в лабораторных или условиях приближенных к реальным очень затратно, а в некоторых случаях просто невозможно.

В работе рассматривается одномерное уравнение теплопроводности с подвижной границей [1]. Данное уравнение описывает процесс промерзания влажного грунта. При решении задач о движении границы между жидкостью и твердым телом, в большинстве случаев используется метод Стефана. Данный метод применим для одномерной задачи [2–3].

В работе рассматривается влажный грунт, на примере пластины бесконечной длины и толщины L (рис. 1), который находится в талом состоянии и имеет начальную постоянную температуру T_0 .

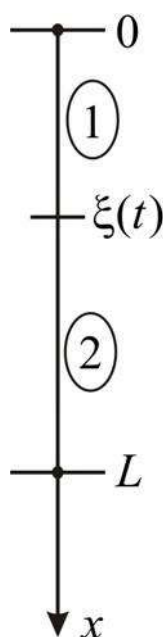


Рис. 1. Область решения

В начальный момент времени на поверхности грунта устанавливается температура T_c , которая ниже температуры замерзания T_3 . В результате образуется промерзший слой переменной толщины $\xi = f(t)$. Нижняя подвижная граница его всегда имеет температуру замерзания T_3 .

На этой границе происходит переход из одного агрегатного состояния в другое, на что требуется теплота перехода Q_ϕ , (Дж/кг). Таким образом, верхняя граница ($x = \xi$) талой зоны имеет постоянную температуру замерзания, а нижняя граница ($x = L$) – некоторую постоянную температуру грунта на большой его глубине. Коэффициенты переноса промерзшей и талой зон различны и предполагается, что перенос тепла в грунте происходит только вследствие теплопроводности.

Задача теплообмена на основе всего вышесказанного записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < \xi(t), t > 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \xi(t) < x < L, t > 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t = 0 : T(x) &= T_0, 0 \leq x \leq L; \\ x = 0 : T(t) &= T_c, t > 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$x = L : \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0;$$

$$x = \xi(t) : \begin{cases} T_1 = T_2 = T_3; \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = Q_\phi p w \frac{d\xi}{dt}; \end{cases}$$

где p – плотность грунта; w – влажность грунта (масса влаги в единице массы абсолютно сухого грунта).

Постоянные температуры, участвующие в постановке задачи: $T_c < T_3 < T_0$. Задачу будем решать методом ловли фронта в узел пространственной сетки. Для этого вводится равномерная пространственная сетка [4–6]:

$$\begin{aligned} x_j &= (i-1) \cdot h, i = 1, \dots, N; \\ x_1 &= 0, \dots, x_N = L; \\ h &= \frac{L}{N-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем неравномерную временную сетку:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \tau_{n+1}, n = 0, 1, \dots, M-1; \\ t_0 &= 0, \dots, t_M = t_{\text{конечное}}; \\ \tau_{n+1} &> 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Шаг по времени $\tau_{n+1}, n = 0, \dots, M - 1$ выбирается таким, чтобы за этот временной промежуток (от t_n до t_{n+1}) граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг пространственной сетки, в этом случае можно записать как $\frac{\partial T_1}{\partial t} \approx \frac{h}{\tau_{n+1}}$.

В работе рассмотрена разностная схема для верхней первой части грунта и для нижней второй части грунта. Исходное первое уравнение системы (1) решаем методом итераций с применением неявной четырёхточечной разностной схемы.

Разностная схема в первой верхней части грунта уравнения (1) имеет вид:

$$\frac{T_{1,i}^{n+1} - T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}} = a_1 \frac{T_{1,i+1}^{n+1} - 2T_{1,i}^{n+1} + T_{1,i-1}^{n+1}}{h^2}, i = 2, \dots, i^* - 1; \quad (5)$$

$T_1|_{i=1} = T_c$; $T_1|_{i=i^*} = T_3$; где $i = i^*$ граница фазового перехода.

Данную систему можно привести к более удобному общему виду

$$A_i \cdot T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i \cdot T_{1,i-1}^{n+1} = F_i, \quad (6)$$

где

$$A_i = C_i = \frac{a_1}{h^2}, B_i = \frac{2 \cdot a_1}{h^2} + \frac{1}{\tau_{n+1}}, F_i = -\frac{T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}}. \quad (7)$$

$$T_i^{n+1} = a_i \cdot T_i^{n+1} + \beta_i \quad (8)$$

$$a_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot a_{i-1}}, \beta_i = \frac{C_i \cdot B_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot a_{i-1}}. \quad (9)$$

Прогоночные коэффициенты находятся по формулам (8). Известное поле температуры определяется по выражению (9). Аналогично рассмотрена разностная схема для нижней второй части грунта уравнения (1).

В результате запоминаем поле температуры с предыдущей итерации и определяем шаг по времени (10):

$$\tau_{n+1} = \frac{2a_1 a_2 h^2 Q_{\phi} p w - h^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) (T_3 - T_{i^*}^n)}{2a_1 a_2 [\lambda_1 (T_3 - T_{i^*-1}^{n+1}) - \lambda_2 (T_{i^*+1}^{n+1} - T_3)]}. \quad (10)$$

На каждом шаге по времени определялась толщина промерзания и затем рассчитывалось температурное поле.

Температура промерзания разных грунтов зависит от консистенции и влажности. На языке программирования Python было получено решение и анализ задачи (1).

При проведении расчетов использовались значения: слой грунта с глубиной $L = 0.3$ м, теплофизические характеристики промерзшей зоны грунта – $\lambda_1 = 2.3$ Вт/(м·К), $\rho_1 = 917$ кг/м³, $c_1 = 2090$ Дж/(кг·К), теплофизические характеристики талой зоны грунта – $\lambda_2 = 0.6$ Вт/(м·К), $\rho_2 = 1000$ кг/м³, $c_2 = 4220$ Дж/(кг·К)), температуры $T_0 = 293$ К, $T_s = 273$ К, $T_c = 268$ К, теплота фазового перехода $Q_\phi = 3.32 \cdot 10^3$ Дж/кг, влажность грунта $w = 1$ кг/кг. На рис. 2 представлены зависимости температуры от координаты (толщины пластины) в различные моменты времени, полученные при решении задачи о промерзании грунта.

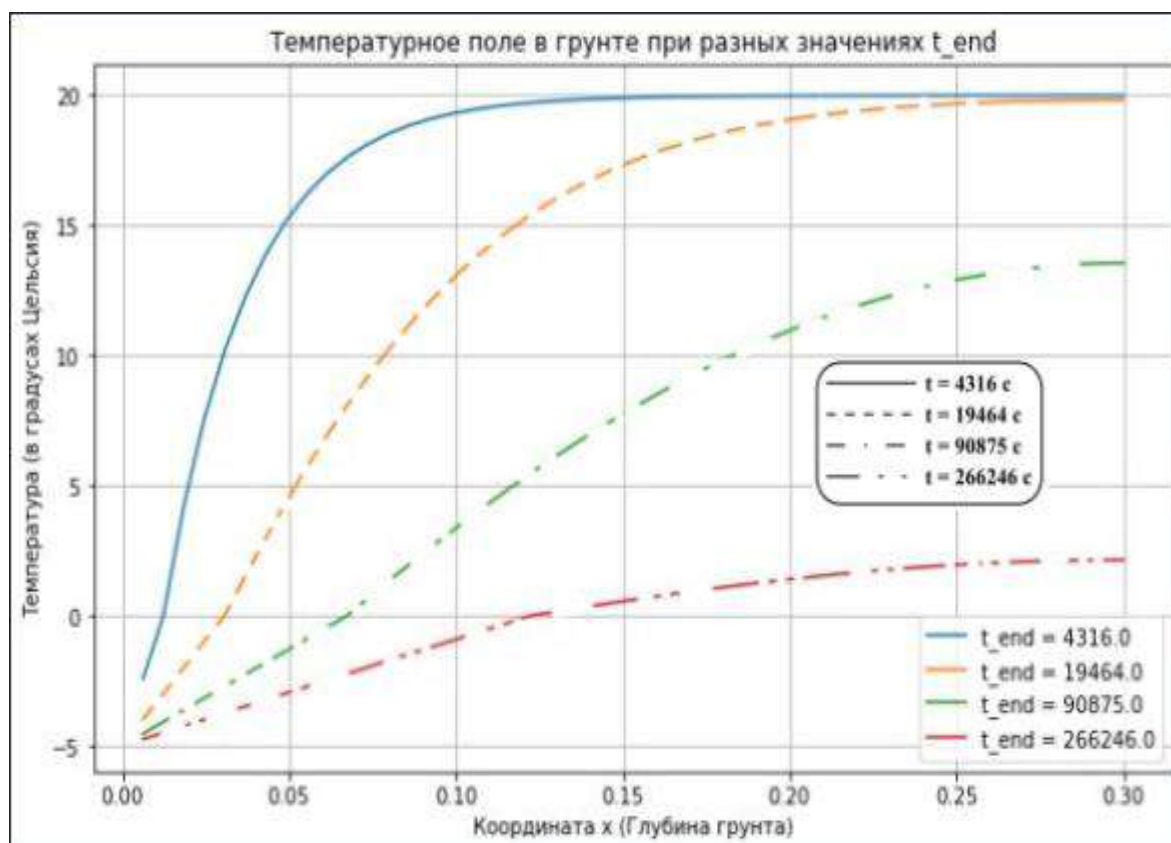


Рис. 2. Распределения температуры по толщине пластины в различные моменты времени

В результате в зависимости от выбранных параметров, можно воссоздать модель промерзания грунта при строительстве. В холодных климатических зонах, глубина промерзания грунта может быть достаточно большой, поэтому необходимо строить глубокий фундамент, чтобы обеспечить стабильную работу строительной конструкции. Знание глубины промерзания грунта, помогает учесть климатические особенности конкретного региона при планировании строительства.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ : Наука, 2004. 798 с.
2. Аксенов Б. Г. Границы решений некоторых нелинейных немонотонных задач для уравнений типа теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33, № 6. С. 884–895.
3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М. : Высш. шк., 2002. 840 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1977. 656 с.
5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Наука, 1987. 598 с.
6. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Гордей Валерьевич Чалышов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
19gordey99@gmail.com

Аннотация. Изучена нелинейная по спектральному параметру задача Штурма – Лиувилля на отрезке с краевыми условиями второго рода. Для исследования задачи предложен новый математический аппарат: метод интегральной характеристической функции. Эта функция определяет собственные значения рассматриваемой задачи Штурма – Лиувилля. Исследование полученной функции позволяет доказать разрешимость изучаемой задачи, найти асимптотику собственных значений, получить теоремы сравнения, естественно, ввести нумерацию собственных значений и нулей собственных функций и т.д.

Ключевые слова: задача Штурма – Лиувилля, асимптотика собственных значений, интегральная характеристическая функция, интегральное характеристическое уравнение

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 24-21-00028).

INTEGRAL CHARACTERISTIC FUNCTION OF THE NONLINEAR STURM – LIOUVILLE PROBLEM

Gordey V. Chalyshev

Penza State University, Penza, Russia
19gordey99@gmail.com

Abstract. The Sturm – Liouville problem on an interval with boundary conditions of the second kind is studied. To study the problem, a new mathematical apparatus is proposed: the method of the integral characteristic function. The study of the resulting function allows one to prove the solvability of the problem under study, find the asymptotics of the eigenvalues, obtain comparison theorems, it is natural to introduce the numbering of the eigenvalues and zeros of the eigenfunctions, etc.

Keywords: The Sturm – Liouville problem, asymptotics of eigenvalues, integral characteristic function, integral characteristic equation

Financing: the work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project № 24-21-00028).

1. Постановка задачи и вводные замечания

Несмотря на тот факт, что такой задачей занимались многие исследователи [1, 2]. В работе используется математический аппарат, основанный на введении интегральной характеристической функции [3].

Пусть функции $P(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ положительны и непрерывны при $(x, \lambda) \in \bar{x} \times \Lambda$, а $\bar{x} = [0, a]$, $1 < a < \infty$ и $\Lambda = [b, +\infty)$, b – вещественная постоянная, и ещё P однократно непрерывно дифференцируемой по x при $x \in \bar{x}$.

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

$$(P(x, \lambda)y'(x))' + Q(x, \lambda)y(x) = 0, \quad x \in \bar{x} = [0, 1], \quad (1)$$

удовлетворяющую следующим условиям

$$y'(0; \lambda) = 0, \quad y'(1; \lambda) = 0,$$

Задачей $\mathcal{P}$ назовём задачу определения тех значений λ , для которых существует нетривиальное классическое решение $y \equiv y(x; \lambda)$ задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$y(0; \lambda) = 1, \quad y'(0; \lambda) = 0. \quad (2)$$

Отметим, что существуют непрерывные биекции $g_i : \nu_i \rightarrow x_i : \eta \rightarrow x$, где $\nu_0 = (-\infty, \eta(0; \lambda))$, $\nu_i = (-\infty; +\infty)$ при $i = \overline{1, n-1}$, $\nu_n = (\eta(1; \lambda), +\infty)$. Если $n = 0$, то $\nu_0 = (\eta(1; \lambda), \eta(0; \lambda))$. Используя биекции g_i определим функции $x \equiv g_i(\eta; \lambda)$, где $\eta \in \nu_i$, а $x \in x_i = (x_i, x_{i+1})$. Из рассуждений получаем следующее выражение

$$T_i(\lambda) := \int \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)},$$

где $\varsigma_i(v; \lambda) = Q(g_i(v; \lambda); \lambda) + v^2/P(g_i(v; \lambda); \lambda)$ при $v \in \nu_i$, $i = \overline{0, n}$.

Далее определим функцию

$$\Phi(\lambda; n) := \sum_{i=0}^n T_i(\lambda).$$

2. Основные результаты

Важнейшим результатом является

Теорема 1. Значение $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}$, если и только если существует целое число $\tilde{n} \geq 0$ такое, что $\lambda = \tilde{\lambda}$ при $n = \tilde{n}$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\lambda; n) - 1 = 0. \quad (2)$$

Формула (2) представляет собой семейство (но не систему) уравнений при различных $n = 0, 1, \dots$. Уравнение (2) является интегральным характеристическим уравнением задачи $\mathcal{P}$, а функция $\Phi(\lambda; n) - 1$ называется интегральной характеристической функцией этой задачи.

Результат, позволяющий исследовать разрешимость уравнения (2), даёт

Утверждение 1. Справедлива оценка

$$\pi \frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leq T_i(\lambda) \leq \pi \frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}},$$

где $p_-(\lambda) = \min P(x, \lambda)$, $q_-(\lambda) = \min Q(x, \lambda)$, $p_+(\lambda) = \max P(x, \lambda)$, $q_+(\lambda) = \max Q(x, \lambda)$.

Из утверждения (1) и формулы функции $\Phi(\lambda; n)$ элементарно получаем

Утверждение 2. Имеет место оценка

$$\pi n \frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leq \Phi(\lambda; n) \leq \pi n \frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}}.$$

Последние указанные оценки являются основным инструментом исследования разрешимости уравнения (2) и установления существования собственных значений задачи $\mathcal{P}$.

Чтобы получить более содержательные результаты о разрешимости уравнения (2), а следовательно, и задачи $\mathcal{P}$, необходимо наложить дополнительные ограничения на функции P и Q . Некоторые такие возможные условия такого типа приведены в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. Если

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_+(\lambda)}{q_-(\lambda)} = 0,$$

то найдется такое целое число $n_0 \geq 0$, что уравнение (2) имеет не меньше одного решения $\lambda = \tilde{\lambda}_n \in \Lambda$ для каждого $n = n_0, n_0 + 1, \dots$; при этом $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \tilde{\lambda}_n = +\infty$

и Λ_i являются неограниченными множествами для всех $i \geq 0$.

Будем предполагать, что справедливы оценки

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_-(\lambda)}{q_+(\lambda)} = o(\lambda^{-2\beta_1}), \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_+(\lambda)}{q_-(\lambda)} = o(\lambda^{-2\beta_2}),$$

где β_1, β_2 – вещественные постоянные и $\beta_1 \geq \beta_2 > 0$.

Имеет место следующий важный результат

Теорема 2. Сформулированная задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число собственных значения $\lambda = \tilde{\lambda}$ с точкой накопления на бесконечности; при этом для достаточно больших номеров n справедливы оценки $(\pi n)^{\frac{1}{\beta_1}} - \Delta \leq \lambda_{n-1} \leq (\pi n)^{\frac{1}{\beta_2}} + \Delta$, где $\Delta > 0$ – произвольная постоянная, и, в случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta > 0$, то $\lambda_{n-1} = O(\pi^{\frac{1}{\beta}})$, где коэффициент при главном члене асимптотики равен $\pi^{\frac{1}{\beta}}$.

Список литературы

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Изд-во иностр. лит., 1953. Т. 1. 348 с.
2. Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A. On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on spectral parameter // Math. Nachr. 1998. Vol. 189. P. 157–170.
3. Валовик Д. В. Об интегральной характеристической функции задачи Штурма – Лиувилля // Математический сборник. 2020. Т. 211, № 11. С. 41–53.

ДВУХМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СИСТЕМОЙ НЕПЛОСКИХ ЭКРАНОВ

Никита Иванович Терехин

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
ternovnik2000@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача рассеяния акустической волны на системе криволинейных экранов в двумерной области.

Ключевые слова: задача дифракции, криволинейные экраны, метод Галеркина

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF DIFFRACTION OF ACOUSTIC WAVE ON CURVILINEAR SCREENS

Nikita I. Terekhin

Penza State University, Penza, Russia
ternovnik2000@gmail.com

Abstract. In this work the two-dimensional problem of acoustic wave diffraction on curvilinear screens is considered

Keywords: diffraction problem, curvilinear screens, Galerkin method

1. Постановка двумерной задачи дифракции

Пусть существует система из конечного числа цилиндрических экранов S_j , совпадающих с цилиндрической поверхностью, которая образована с помощью плоской бесконечно дифференцируемой кривой конечной длины γ_j , которая может быть как замкнутой, так и незамкнутой.

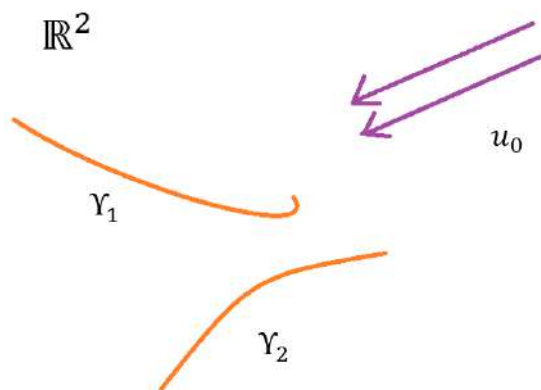


Рис. 1. Постановка задачи

Акустическая задача дифракции на экранах S_j состоит в нахождении u – скалярной функции рассеянного поля и решении однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

которое удовлетворяет краевым условиям Дирихле

$$u|_Y = -f \quad (2)$$

на Y и условиям излучения Зоммерфельда

$$u = O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (4)$$

где $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$.

Также на поле u накладывается условие ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства

$$u \in H_{loc}^1\left(R^2 \setminus \overline{M_0}\right), \quad (5)$$

Решение поставленной задачи (1)–(5) будем искать в виде потенциалов [1]

$$u(x) = K_0(q\varphi) := \frac{i}{4} \int_Y H_0^{(1)}(k|x-y|) \varphi(y) dl, \quad \varphi \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(Y). \quad (6)$$

Здесь $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля 1-го рода.

Уравнение на экранах Y имеет вид

$$D\varphi := \frac{i}{4} \int_Y H_0^{(1)}(k|x-y|) \varphi(y) dl = f(x), \quad x \in Y, D = p\eta_0 K_0 q. \quad (7)$$

Если φ это решение уравнения, то (7) это решение искомой задачи.

2. Определение матричных элементов в методе Галеркина

Рассмотрим метод Галеркина для решения уравнения $D\varphi = f$ с базисными функциями

$$v_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

приводящий к СЛАУ $\langle D\varphi_h, v_i \rangle = \langle f, v \rangle$. Из решения СЛАУ получим известные коэффициенты c_i . Приближенное решение уравнение имеет

вид $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i v_i(x)$. Расширенная матрица имеет размер $2 \cdot n \times (2 \cdot n + 1)$

и состоит из четырех блоков. Каждый блок имеет размер $n \times n$.

Элементы матрицы первого блока вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} & \int_{YY} \int H_0^{(1)}(k|x-y|) v_i(x) v_j(y) ds ds = \\ & = \sum_{i=0}^N \sum_{j=n}^N H_0^{(1)} \left(k \left| \sqrt{\left(\varphi\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right) \right)^2 + \left(\psi\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right) - \psi\left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right) \right)^2} \right| \right) \cdot \\ & \cdot \sqrt{\left(\varphi'\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right) \right)^2 + \left(\psi'\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right) \right)^2} \sqrt{\left(\varphi'\left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right) \right)^2 + \left(\psi'\left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right) \right)^2}, \end{aligned}$$

где N – число разбиений отрезка интегрирования.

Элементы правой части уравнения будем вычислять по формуле

$$\begin{aligned} \int_Y u_0(x, y) v_i(x) ds &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_0(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2} dt \approx \\ &\approx \sum_{i=0}^N u_0\left(\varphi\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right), \psi\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right)\right) \times \\ &\times (\tau_{i+1} - \tau_i) \sqrt{\left(\varphi'\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right)\right)^2 + \left(\psi'\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right)\right)^2}, \end{aligned}$$

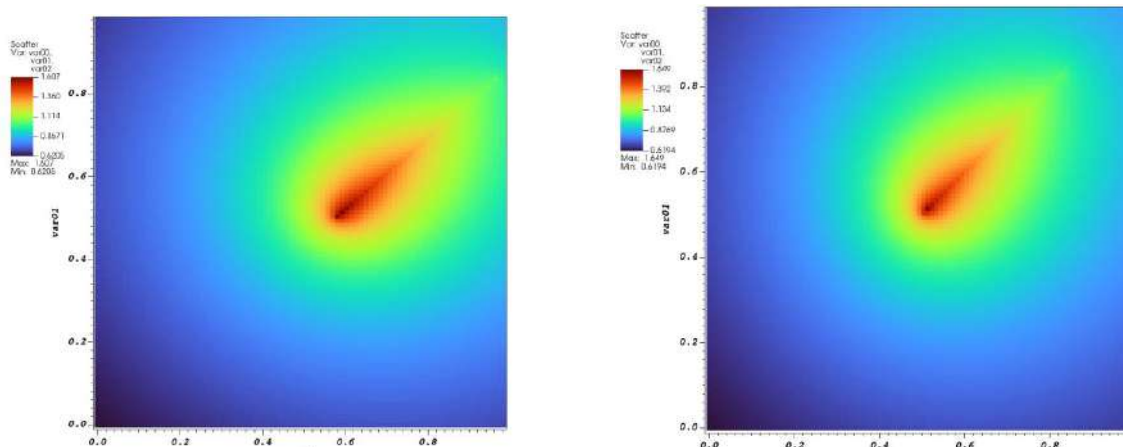
где u_0 – уравнение падающей волны.

3. Численные результаты

В однородном пространстве рассмотрим задачу дифракции на плоском экране в виде прямой с уравнением

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = t, \\ y = \psi_1(t) = t \end{cases}$$

в области параметров $t \in [0, 1]$ для плоской падающей волны. Рассмотрим зависимость вне решения от числа n базисных функций. Результат вычислений предоставлен на рисунке 2.



а)

б)

Рис. 2. Один плоский экран в виде прямой: а) при $n = 20$ базисных функций; б) при $n = 100$ базисных функций

При решении задачи наблюдается устойчивость решения вне экрана.

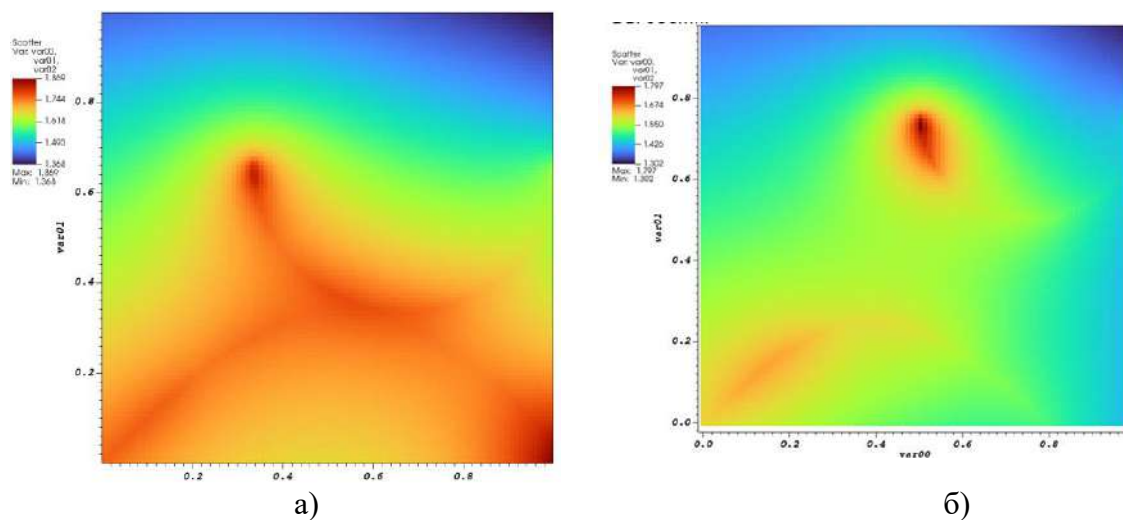
На рисунке 3 представлена серия численных экспериментов. В однородном пространстве рассмотрим задачу дифракции на системе экранов, заданных уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = \cos t + l \\ y = \psi_1(t) = \sin t + l' \end{cases}$$

что задают на плоскости нижнюю половину круга в области параметров $t_1 \in [\pi, 2\pi]$, и

$$\begin{cases} x = \varphi_2(t) = t \\ y = \psi_2(t) = \sin t \end{cases}$$

то есть синусоиду. Проведем эксперимент, удаляя от друг друга экраны, меняя параметр l .



а)

б)

Рис. 3. Круг и синусоида

Результаты представлены на рисунке 3. На рисунке 3(а) $l = 3$, тогда как на рисунке 3(б) $l = 2$ и экраны практически касаются друг друга. Падающая волна распространяется вдоль экранов в направлении от начала координат. При приближении экранов можем наблюдать усиление поля [2–6].

Заключение

В данной работе решена задача дифракции акустической волны на системе неплоских экранов методом Галеркина. Предложена строгая математическая постановка задачи, выведены интегральные уравнения задачи дифракции. Рассмотрены формулы вычисления элементов матрицы в системе линейных алгебраических уравнений. Описаны результаты решения задачи –дифракционная картина на системе неплоских экранов и вне их.

Список литературы

1. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : Радиотехника, 1996.
2. Kress R. Linear integral equations. Applied mathematical sciences. Springer Verlag New York Inc., 1989. Vol. 89.
3. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М. : КноРус, 2016.
4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М. ; Л. : Физ. мат. лит., 1963.
5. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л. : Судостроение, 1989.
6. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М. : Высш. шк., 2002.

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

УДК 519.6

ПОЛИНОМЫ, НАИМЕНЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИКАХ

София Олеговна Белоус

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
bel.8@mail.com

Аннотация. Изучены полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля в различных метриках. Для исследования задачи предложена краткая теория о наилучшем приближении полиномами. Рассмотрено наилучшее линейное и нелинейное среднеквадратичное и равномерное приближение, установлены условия применимости каждого приближения. Произведено сравнение точности, достигаемой при наилучшей равномерной и наилучшей среднеквадратичной аппроксимации.

Ключевые слова: полиномы наилучшего приближения, линейная аппроксимация, нелинейная аппроксимация, наилучшее равномерное приближение

POLYNOMIALS THAT DEVIATE LEAST FROM ZERO IN VARIOUS METRICS

Sofia O. Belous

Penza State University, Penza, Russia
bel.8@mail.com

Abstract. The polynomials that deviate least from zero in various metrics are studied. To study the problem, a brief theory on the best approximation by polynomials is proposed. The best linear and nonlinear mean square and uniform approximations are considered, and the conditions for the applicability of each approximation are established. A comparison is made of the accuracy achieved with the best uniform and best root-mean-square approximation.

Keywords: best approximation polynomials, linear approximation, nonlinear approximation, best uniform approximation

1. Теория

Теория приближений функций берёт начало от работ П. Л. Чебышева. Он ввёл одно из основных понятий теории (см. [1]) – понятие наилучшего приближения функции полиномами и получил ряд результатов о наилучших приближениях. Наилучшим приближением непрерывной функции $f(x)$ полиномами $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$ в метрике C называется величина

$$E_n(f)_C = \min \left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|_C,$$

где минимум берется по всем числам $a_1, \dots, a_n$. Полином, для которого достигается этот минимум, называется полиномом наилучшего приближения.

Чебышев установил, что наилучшее приближение функции x^{n+1} на отрезке $[-1, 1]$ в метрике пространства C непрерывных функций алгебраическими многочленами степени n равно 2^{-n} , а многочлен наилучшего приближения таков, что:

$$x^{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = 2^{-n} \cos(n+1) \arccos x.$$

Условие наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве функций отображено в следующей задаче:

Заданы функция $y(x)$ и множество функций $\varphi(x)$, принадлежащие линейному нормированному пространству функций. Требуется найти наилучшее приближение, т.е. функции $\bar{\varphi}(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|y(x) - \bar{\varphi}(x)\| = \inf \|y(x) - \varphi(x)\| = v.$$

Рассмотрим линейную аппроксимацию на примере гильбертова пространства $L_2(\rho)$ действительных функций, интегрируемых с квадратом с весом $\rho(x) > 0$ на $[a, b]$.

В качестве аппроксимируемой функции выберем линейную комбинацию

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x).$$

Подставив ее в условие наилучшего приближения, приравняв к нулю производные по коэффициентам, получим систему линейных уравнений (см. [2])

$$\sum_{k,m=1}^n (\varphi_k, \varphi_m) a_m = (y, \varphi_k), 1 \leq k \leq n.$$

Еопределитель есть определитель Грама функций $\varphi_k(x)$; поскольку функции линейно-независимы, он отличен от нуля. Для вычисления наилучшего среднеквадратичного приближения необходимо решить данную систему линейных уравнений. Для упрощения расчетов рекомендуется ортогонализировать линейно-независимую систему функций. Описанный выше алгоритм бее устойчив к погрешностям округления по сравнению с непосредственным построением интерполяционного многочлена Лагранжа [3].

Для среднеквадратичной аппроксимации удобнее в качестве $\varphi_k(x)$ брать многочлены, ортогональные с заданным весом. Наиболее употребительны из них многочлены Якоби (частным случаем которых являются многочлены Лежандра и Чебышева), Лагерра и Эрмита. Для аппроксимации периодических функций используют тригонометрический ряд; он соответствует $\rho(x) = 1$.

Линейная, особенно линейная полиномиальная, аппроксимация часто не соответствует характеру функции, в таких случаях выгоднее использовать нелинейную зависимость от коэффициентов. Используются два вида зависимости: квазилинейная, сводящаяся выравнивающей заменой переменных $\eta(y), \xi(x)$ к линейной, и дробно-линейная. Дробно-линейная зависимость используется, в основном, когда аппроксимирующая функция рациональна:

$$\varphi(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right)}{\left(\sum_{q=0}^m b_q x^q\right)}.$$

Равномерная аппроксимация используется в случае, если норма в линейном нормированном пространстве определяется не через скалярное произведение.

Сравнение точности, достигаемой при наилучшей равномерной и наилучшей среднеквадратичной аппроксимациях (см. [2]):

Пусть для произвольной функции $y(x)$ с периодом 2π тригонометрический многочлен наилучшего равномерного приближения есть $R_n(x)$. Доказано, что тригонометрический многочлен наилучшего

среднеквадратичного приближения той же степени $Q_n(x)$ имеет погрешность не более:

$$\|y(x) - Q_n(x)\|_C \leq (4,5 + \ln n) \|y(x) - R_n(x)\|_C.$$

Сходные оценки существуют и для наилучших аппроксимаций алгебраическими многочленами на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Из неравенства следует, что при небольших n погрешность многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения даже в $\|\cdot\|_C$ не сильно превосходит погрешность многочленов наилучшего равномерного приближения.

Для функций с непрерывными старшими производными, не слишком большими по абсолютной величине, наилучшие равномерные приближения обеспечивают высокую точность уже при небольших $n \approx 5 \div 10$. Значит, для таких функций наилучшие среднеквадратичные приближения будут обеспечивать в $\|\cdot\|_C$ почти ту же точность, что и наилучшие равномерные приближения. Только для недостаточно гладких функций среднеквадратичные приближения не сходятся или плохо сходятся в $\|\cdot\|_C$, но в этом случае и наилучшие равномерные приближения сходятся настолько медленно, что практически их трудно использовать [4, 5].

2. Выводы

Приближение полиномами, наименее отклоняющимися от нуля в различных метриках, позволяет аппроксимировать функции на большом промежутке. В зависимости от характера функции выбирается линейная и нелинейная аппроксимация. Алгоритмы нахождения наилучших среднеквадратичных приближений намного проще, чем известные алгоритмы нахождения наилучших равномерных приближений. На практике удобнее искать наилучшие среднеквадратичные, а не равномерные приближения; для улучшения их сходимости следует явно выделять в простой форме основные особенности функции и ее младших производных и аппроксимировать оставшуюся достаточно гладкую часть. К нахождению равномерных приближений прибегают в основном при разработке алгоритмов для стандартных программ вычисления функций, когда добиваются очень высокой точности при минимальном числе членов суммы.

Список литературы

1. Теляковский С. А. Приближение функций // Большая российская энциклопедия 2004–2017. URL: <https://old.bigenc.ru/mathematics/text/3166096> (дата обращения: 12.05.2024).

2. Калиткин Н. Н. Численные методы : учебник для вузов. СПб. : Изд-во БНУ, 2014.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы : учеб. пособие. М. : Наука, 1987.
4. Tynda A., Noeiaghdam S., Sidorov D., Polynomial spline collocation method for solving weakly regular volterra integral equations of the first kind // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics. 2022. Vol. 39. P. 62–79.
5. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564. doi: 10.15507/2079-6900.25.202301.554-564

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В-СПЛАЙНОВ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ

Максим Дмитриевич Бугорков

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
max.bugorkov@gmail.com

Аннотация. Изучены В-сплайны, для исследования задачи аппроксимации такими сплайнами изложена необходимая теория. Рассматриваются базисная запись интерполяционного сплайна, его периодичность и погрешность. Приведены результаты численных экспериментов, реализующих аппроксимацию функций с помощью В-сплайнов.

Ключевые слова: аппроксимация, сплайн, функция, В-сплайн, степень, узлы

USING B-SPLINES IN APPROXIMATION PROBLEMS

Maxim D. Bugorkov

Penza State University, Penza, Russia
max.bugorkov@gmail.com

Abstract. B-splines are studied, and the necessary theory for the study of the problem of approximation by such splines is stated. The basis record of interpolation spline, its periodicity and error are considered. The results of numerical experiments realizing approximation of functions by means of B-splines are given.

Keywords: approximation, spline, function, B-spline, degree, knots

1. Вводные замечания

Аппроксимация функций сплайнами широко используется в вычислительной математике и приложениях (см. напр. [1–5] и цитированную там литературу). Особенно распространены и исследованы полиномиальные сплайны. В-сплайны обладают хорошей устойчивостью, позволяют использовать высокие степени сплайна при большом числе узлов, и обеспечивают высокую точность аппроксимации.

Базисная запись интерполяционного сплайна. Задана сетка узлов сплайна $\omega = \{x_n; 0 \leq n \leq N\}$, в общем случае неравномерная. Произвольно поставив слева и справа по p дополнительных узлов x_n ,

получим расширенную сетку $\Omega = \{x_n; -p \leq n \leq N + p\}$. Показано [7], что – сплайн p -й степени дефекта 1, «начинающийся» в n -м узле сетки, имеет следующий вид:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{p+1} b_{nk} (x - x_{n+k})_+^p, \quad -p \leq n \leq N-1 \quad (1)$$

где

$$b_{n0} = 1, \quad b_{nk} = - \prod_{l=1, \dots, p+1; l \neq k} (x_{n+l} - x_n) / (x_{n+l} - x_{n+k}), \quad 1 \leq k \leq p+1 \quad (2)$$

и

$$\xi_+ = \xi \quad \text{при} \quad \xi \geq 0, \quad \xi_+ = 0 \quad \text{при} \quad \xi < 0. \quad (3)$$

$$B_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \leq x_n \quad \text{или} \quad x \geq x_{n+p+1}. \quad (4)$$

Теорема [6]. В-сплайны (1) линейно независимы на $[x_0, x_N]$.

Следствие. Любой сплайн p -й степени дефекта 1 на сетке ω однозначно представляется суммой

$$S(x) = \sum_{n=-p}^{N-1} c_n B_n(x). \quad (5)$$

Этот сплайн содержит $N + p$ свободных параметров c_n .

Зададим значения функции $u(x)$ на сетке $\omega: u_n = u(x_n), 0 \leq n \leq N$.

Сплайн является интерполяционным, если значения $S(x)$ и $u(x)$ в этих узлах совпадают:

$S(x_k) = u_k, 0 \leq k \leq N$. Подставляя сюда (5) и учитывая (4), получим недоопределенную линейную систему для коэффициентов c_n :

$$\sum_{n=k-p}^{k-1} B_n(x_k) c_n = u_k, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (6)$$

Матрица этой системы прямоугольная размерности $(N+1) \times (N+p)$; она ленточная с шириной ленты p . Решение этой системы (а тем самым, интерполяционный сплайн) имеет $p-1$ свободный параметр; для их определения нужны дополнительные условия.

Периодичность. Пусть $u(x)$ периодическая с периодом $x_N - x_0$ (при этом выполняется $u_0 = u_N$). Потребуем от сплайна периодического продолжения. Это означает равенство $p-1$ производной на левой и правой границах:

$$S^{(q)}(x_0) = S^{(q)}(x_N), \quad 1 \leq q \leq p-1. \quad (7)$$

Случай $q = 0$, соответствующий непрерывности самой функции, сюда не включается: он следует из равенства $u_0 = u_N$ и первого и последнего из уравнений (6).

Подставим (5) и (1) в (7), тогда система уравнений (7) примет следующий вид:

$$\sum_{n=-p}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{p+1} b_{nk} \left[(x_N - x_{n+k})_+^{p-q} - (x_0 - x_{n+k})_+^{p-q} \right] \right\} c_n = 0, 1 \leq q \leq p-1. \quad (8)$$

Линейная система (6), (8) содержит $N + p$ уравнений и определяет коэффициенты c_n периодического сплайна. Таким образом, алгоритм нахождения коэффициентов прост и универсален, то есть пригоден для произвольной степени p .

Погрешность. Интегральная погрешность вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} (\delta l_n)^2 &\equiv \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[S^{(q)}(x) - u^{(q)}(x) \right]^2 dx \approx \# \\ &\approx \left(\beta_{p-q} h^{p-q+1} \right)^2 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[u^{(p+1)}(x) \right]^2 dx, 0 \leq q \leq p \# \end{aligned} \quad (9)$$

Суммируя (9) по всем интервалам, получим:

$$\delta L \equiv S^{(q)} - u^{(q)}_{L_2} \approx \beta_{p-q} h^{p-q+1} u^{(p+1)}_{L_2} \quad (10)$$

2. Основные результаты

Ниже представлена реализация алгоритма приближения В-сплайнами с использованием системы компьютерной алгебры Maple (рис. 1–3).

Аппроксимация функции $e^{-x} \sin(2\pi x)$. Количество узлов $n = 20$. Синяя линия – аппроксимация, красная линия – график функции [8–11].

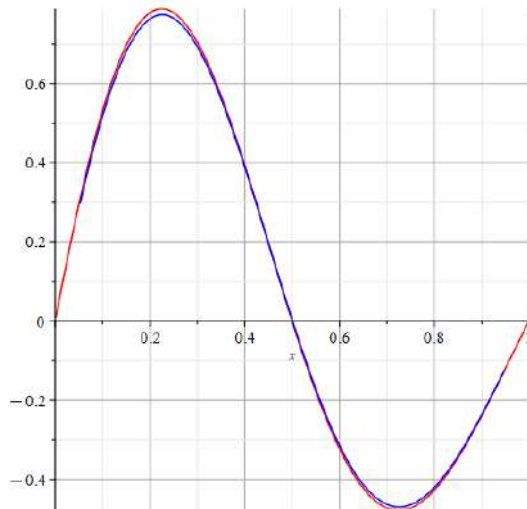


Рис. 1. Степень В-сплайна 3

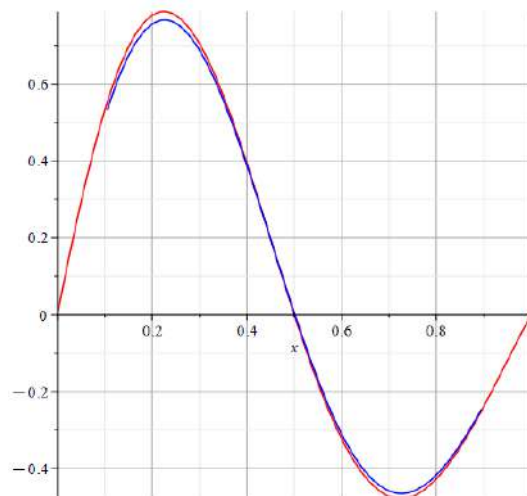


Рис. 2. Степень В-сплайна 5

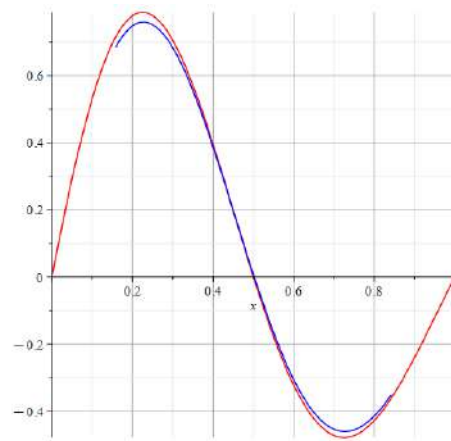


Рис. 3. Степень В-сплайна 7

Аппроксимация функции $\frac{2x}{x^2 + 6}$. Количество узлов $n = 40$ (рис. 4–6).

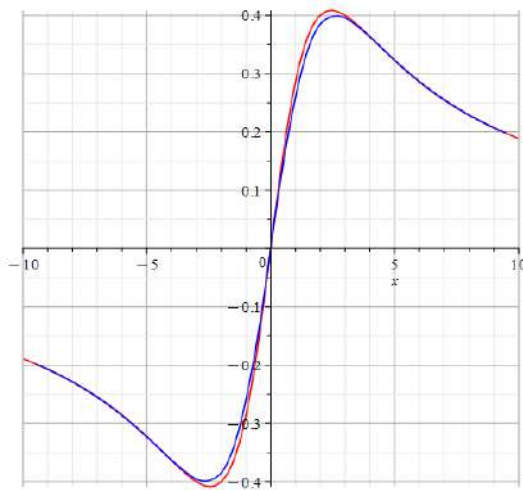


Рис. 4. Степень В-сплайна 3

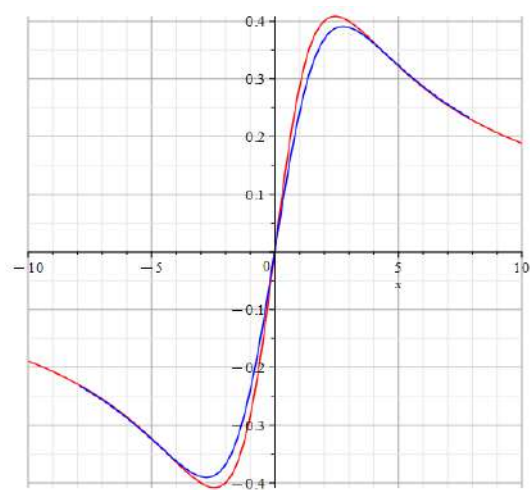


Рис. 5. Степень В-сплайна 5

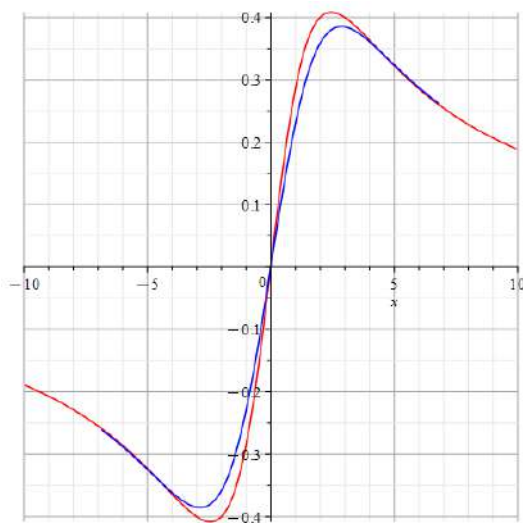


Рис. 6. Степень В-сплайна 7

Список литературы

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М. : Мир, 1972.
2. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и связь, 1985.
3. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976.
4. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980.
5. Farin G. Splines in CAD/CAM. Surv. // Math. Industry. 1991. Vol. 1, № 1. P. 39–73.
6. Калиткин Н. Н., Шляхов Н. М., Интерполяция В-сплайнами // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 4. С. 110.
7. Калиткин Н. Н., Шляхов Н. М. В-сплайны произвольной степени // Доклады Академии наук. 1999. Т. 367, № 2. С. 157–160.
8. Tynda A., Noeiaghdam S., Sidorov D. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular volterra integral equations of the first kind // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics. 2022. Vol. 39. P. 62–79.
9. Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // Журнал Средне-волжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577.
10. Кудряшова Н. Ю., Ирышкова Ю. В. Разностные методы решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем (МКМ-2019) : сб. ст. XIII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Пенза, 3–6 июня 2019 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. С. 59–64.
11. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564.

ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЕ И СГЛАЖИВАЮЩИЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Станислав Игоревич Голованов¹,
Елена Владимировна Грозная²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹stasgolova555@mail.ru, ²kedrel@mail.ru

Аннотация. Изучены методы интерполяции и сглаживания функции кубическими сплайнами. Для исследования задачи был представлен алгоритм для интерполяции определенной функции кубическими сплайнами. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие качество приближения конкретных функций с помощью такого вида сплайнов.

Ключевые слова: кубический сплайн, интерполяционный сплайн, сглаживающий сплайн, задача о минимизации функционала

INTERPOLATING AND SMOOTHING CUBIC SPLINES

Stanislav I. Golovanov¹, Elena V. Groznaya²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹stasgolova555@mail.ru, ²kedrel@mail.ru

Abstract. Methods of interpolation and smoothing of a function by cubic splines are studied. To investigate the problem, an algorithm was presented for interpolating a certain function with cubic splines. Numerical experiments have been carried out to illustrate the quality of approximation of specific functions using this type of splines.

Keywords: Cubic spline, Interpolation spline, Smoothing spline, Functional minimization problem

1. Интерполяционные сплайны

Сплайны – это математические функции, которые используются для аппроксимации или интерполяции данных. Интерполирующие сплайны используются для восстановления промежуточных значений между известными точками данных, тогда как сглаживающие сплайны используются для уменьшения шума и упрощения данных путем аппроксимации кривой линией или кривой [1].

Интерполирующие сплайны обеспечивают более точное приближение к исходным данным, поскольку они проходят через все заданные

точки. Однако они могут быть более чувствительны к выбивающимся значениям и шумам в данных, что может привести к переобучению модели.

С другой стороны, сглаживающие сплайны уменьшают сложность модели, минимизируя переобучение и шум в данных. Они создают более гладкую кривую, которая может быть более удобной для анализа и визуализации [1–3].

Кубические сплайны – это кусочно-заданные функции, которые состоят из нескольких кубических полиномов. Они используются для сглаживания, интерполяции и экстраполяции данных и особенно полезны в тех случаях, когда данные являются шумными или имеют резкие изменения. Кубические сплайны определяются набором параметров, которые можно оценить с использованием различных методов, таких как методы наименьших квадратов или максимальных правдоподобия.

Наиболее распространенными в науке и технике являются сплайны 3-й степени дефекта один, т.е.

$$\begin{matrix} m = 3, \\ r = 1 \end{matrix} \rightarrow m - r = 3 - 1 = 2$$

т. е. дважды непрерывно дифференцируемый многочлен 3-й степени на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Сплайны, удовлетворяющие условию интерполяции, называются интерполяционными. Основным достоинством интерполяционного кубического сплайна $S(x)$ дефекта один является следующее: этот сплайн обладает минимумом интегральной кривизны на всем заданном отрезке $[a, b]$ по сравнению с другими интерполяционными функциями $\bar{f}(x)$, т.е.

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [\bar{f}''(x)]^2 dx$$

Выведем интерполяционные кубические сплайны $S_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, дефекта один в соответствии с таблицей (3.1). Кубический сплайн $S(x)$ на отрезке $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеет четыре неизвестных коэффициента. Количество отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ в соответствии с таблицей (3.1) равно n . Для определения 4-х n коэффициентов имеются следующие условия в узлах интерполяции:

- условие интерполяции $S(x_i) = y_i$ $i = \overline{0, n}$;
- непрерывность сплайнов $S(x_{i-0}) = S(x_{i+0})$, $i = \overline{1, n-1}$;
- непрерывность производных 1-го порядка $S'(x_{i-0}) = S'(x_{i+0})$, $i = \overline{1, n-1}$;
- непрерывность производных 2-го порядка $S''(x_{i-0}) = S''(x_{i+0})$, $i = \overline{1, n-1}$.

Таким образом, всего имеется $(n + 1) + 3(n - 1) = 4n - 2$ условий. В качестве двух недостающих условий задают значения производных 1-го или 2-го порядка в узлах x_q и x_n . Для вывода используем значения $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. В этом случае сплайн называется естественным.

Во многих случаях (когда имеют место неточности входных данных, либо точки находятся друг к другу слишком близко), вместо интерполяционного сплайна (который проходит через все заданные точки), используют сглаживающие сплайны, которые могут несколько отклоняться от заданных точек.

Кубические сплайны обеспечивают универсальный и точный метод сглаживания данных, который может обрабатывать сложные наборы данных с нарушениями, шумом или отсутствующими значениями. Преимущества использования кубических сплайнов для сглаживания данных делают их популярным выбором для исследователей и ученых – ученых, которые стремятся извлечь значимую информацию из своих данных.

2. Сглаживающие сплайны

Рассмотрим построение сглаживающих сплайнов:

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена некоторая функция $f(x)$ и в точках сетки Δ известны ее приближенные значения $\tilde{f}_i, i = 0, 1, \dots, n$. Тогда, если погрешности $\varepsilon_i = f(x_i) - \tilde{f}_i$ носят случайный характер, причем они могут оказаться большими в некоторых точках, то применение обычной интерполяции приводит к большой погрешности, т.е. интерполирующая функция сильно отличается от функции $f(x)$. В частности, график сплайна обычно имеет выраженные осцилляции. Поэтому возникает необходимость построить сплайн, проходящий вблизи заданных значений, но более «гладкий», чем интерполяционный. Такие сплайны называются сглаживающими, а процедура их построения – сглаживанием.

Сглаживающие сплайны возникают при решении задач о минимизации функционала:

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^n \rho_i^{-1} (f_i - \tilde{f}_i)^2, \quad (1)$$

где $\rho_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$) – весовые коэффициенты, с помощью которых можно регулировать степень близости функции к заданным значениям $\tilde{f}_i$.

Решением вариационной задачи (1) является кубический сплайн $S_\Delta(x)$, удовлетворяющий граничным условиям

$$S''_\Delta(a) = S''_\Delta(b) = 0.$$

Так как кубический сплайн однозначно определяется множеством значений $\tilde{f}_i, i = 0, 1, \dots, n$, принимаемых в узлах $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, то минимизация $J(f)$ сводится к нахождению минимума от переменных $f_0, f_1, \dots, f_n$.

Принимая во внимание равенство

$$S''_{\Delta}(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_{i-1}} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (2)$$

где $M_i = S''_{\Delta}(x_i), i = 0, 1, \dots, n-1, M_0 = M_n = 0$ и подставляя в (1) вместо $f''(x)$ выражение (2), приходим к задаче минимизации функционала

$$J(f) = (BM, M) + \sum_{i=0}^n \rho_i^{-1} (f_i - \tilde{f}_i)^2, \quad (3)$$

В результате применения необходимого условия минимума функции

$$\frac{\partial J}{\partial f_i} = 0, i = 0, 1, \dots, n,$$

приходим к матричному уравнению

$$H^T M + R^{-1} f = R^{-1} \tilde{f}, \quad (4)$$

Учитывая, что по определению кубических сплайнов $BM = Hf$, окончательно получаем, что

$$(B + HRH^T)M = H\tilde{f}. \quad (5)$$

Матрица системы (5) пятидиагональна, симметрична и положительно определена, в силу чего она имеет единственное решение, которое можно найти методом прогонки.

В результате применения метода прогонки получаем соотношение:

$$f_i = \tilde{f}_i - \rho_i D_i, i = 0, 1, \dots, n, \quad (6)$$

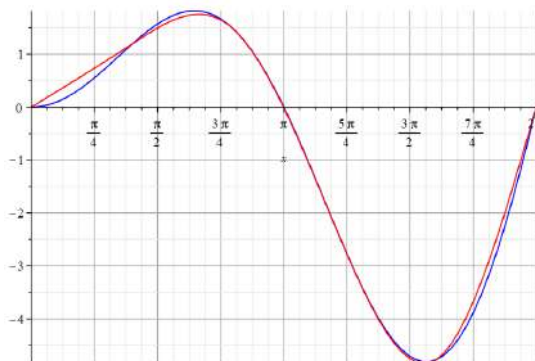
где

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{h_0} (M_1 - M_0), \\ D_i &= \frac{1}{h_i} (M_{i+1} - M_i) - \frac{1}{h_{i-1}} (M_i - M_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n-1, \\ D_n &= \frac{1}{h_{n-1}} (M_n - M_{n-1}). \end{aligned}$$

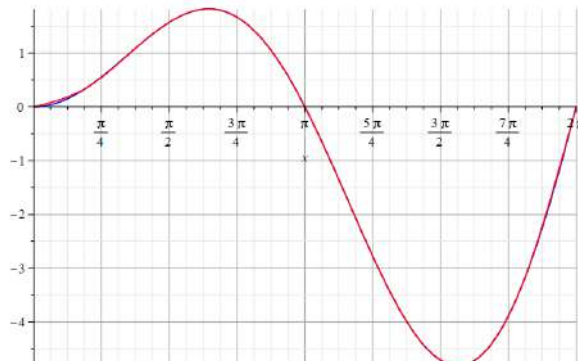
3. Численные эксперименты

Для иллюстрации качества аппроксимации сплайнами рассмотрим несколько функций [4–8].

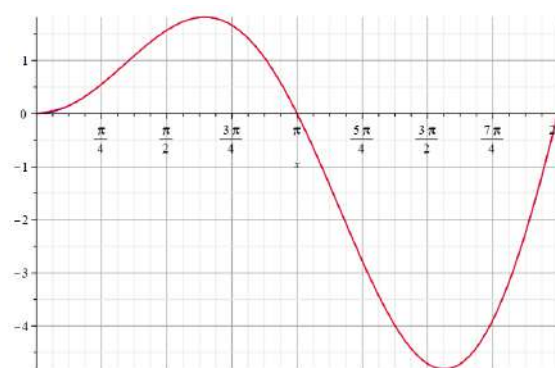
1) Функция $f(x) = x * \sin(x)$, на отрезке $[0, 2\pi]$; N – количество точек.



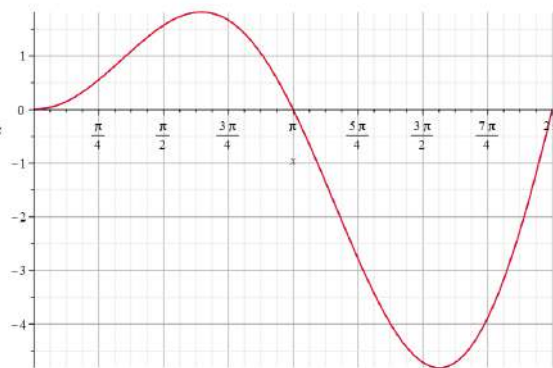
$N = 5$



$N = 10$



$N = 15$



$N = 20$

$$\varepsilon = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |S(x) - f(x)|,$$

где $S(x)$ – функция-сплайн, $f(x)$ – аппроксимируемая функция.

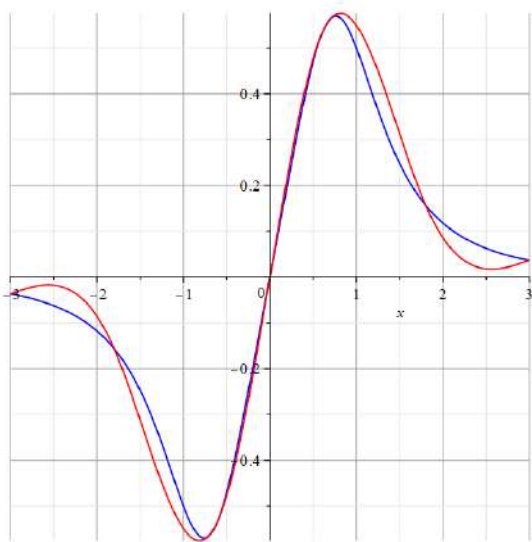
N	3	5	10	15	20	25
ε	1.64682015	0.2626140	0.043783	0.0177344	0.009940	0.00588313266

2) Функция $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$, на отрезке $[-3, 3]$; N – количество точек.

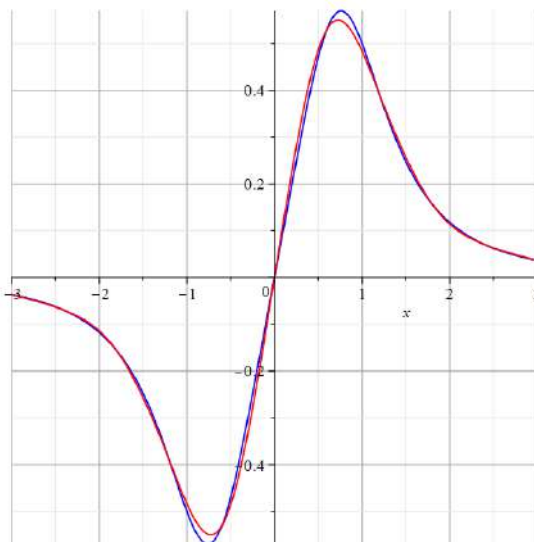
$$\varepsilon = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |S(x) - f(x)|,$$

где $S(x)$ – функция-сплайн, $f(x)$ – аппроксимируемая функция.

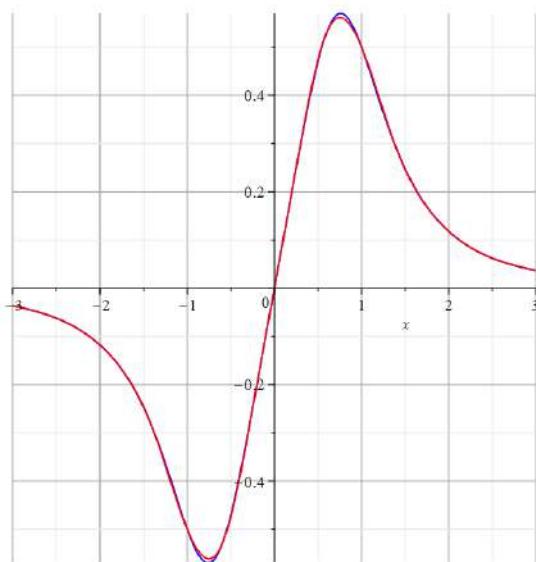
N	5	10	15	20	25	30
ε	0.0862937094	0.0320320982	0.0089456368	0.0029996317	0.0011731930	0.0004557361



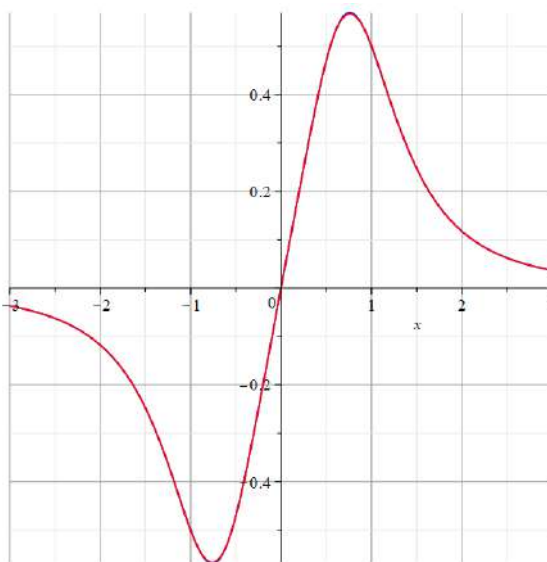
$N = 5$



$N = 10$



$N = 15$



$N = 20$

Список литературы

1. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М. : Физматлит, 2004. 400 с.
2. Савотченко С. Е., Кузьмичева Т. Г. Методы решения математических задач в Maple : учеб. пособие. Белгород : Белаудит, 2001. 116 с.
3. Бурова И. Г. Практикум по методам вычислений MAPLE, OPEN MP. СПб., 2017. 76 с.
4. Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // Журнал Средне-волжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577.
5. Tynda A., Noeiaghdam S., Sidorov D. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular volterra integral equations of the first kind // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics. 2022. Vol. 39. P. 62–79.

6. Tynda A. N., Sidorov D. N. Inverse Problem for the Integral Dynamic Models with Discontinuous Kernels // Mathematics. 2022. № 10 (21). P. 3945. doi: 10.3390/math10213945

7. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564.

8. Кудряшова Н. Ю., Шалдаева А. А. Применение методов регуляризации к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. XIII Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 4 декабря 2018 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. С. 3–7.

СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Анастасия Викторовна Лезина¹,
Александр Николаевич Тында²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹lizuha.nas@gmail.com, ²tyndaan@mail.ru

Аннотация. Изучен способ сглаживания экспериментальных данных. Для исследования задачи предложен распространенный математический аппарат: метод наименьших квадратов. Данный метод минимизирует суммы квадратов отклонений экспериментальных значений от значений, предсказанных моделью. Именно это позволяет найти такую функцию, которая наилучшим образом аппроксимирует экспериментальные данные.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, минимизации отклонения сглаживающей функции, СЛАУ, наилучшее приближение, экспериментальные данные

SMOOTHING OF EXPERIMENTAL DATA USING THE LEAST SQUARES METHOD

Anastasia V. Lezina¹, Alexander N. Tynda²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹lizuha.nas@gmail.com, ²tyndaan@mail.ru

Abstract. The method of smoothing experimental data has been studied. To study the problem, a common mathematical apparatus is proposed: the least squares method. This method minimizes the sum of the squares of the deviations of the experimental values from the values predicted by the model. And this is what makes it possible to find a function that best approximates the experimental data.

Keywords: least squares method, approximating function, normal equations, experimental data, SLAE

1. Постановка задачи и вводные замечания

Сглаживание экспериментальных зависимостей является важной задачей в научных исследованиях и инженерной практике. При наличии значительного числа экспериментальных точек сглаживание с помощью многочленной интерполяции не имеет смысла не только из-за неустойчивости (локальных выбросов) интерполирующей функции, но

и из-за сильного колебания заданных точек [1]. Способы локальной интерполяции, например с помощью сплайнов, также не дают приемлемых результатов. В этом случае дискретно заданную функцию сглаживают в среднем, чаще всего многочленом, коэффициенты которого находят с помощью минимизации отклонения сглаживающей функции от заданных точек в некотором среднеинтегральном смысле (рис. 1).

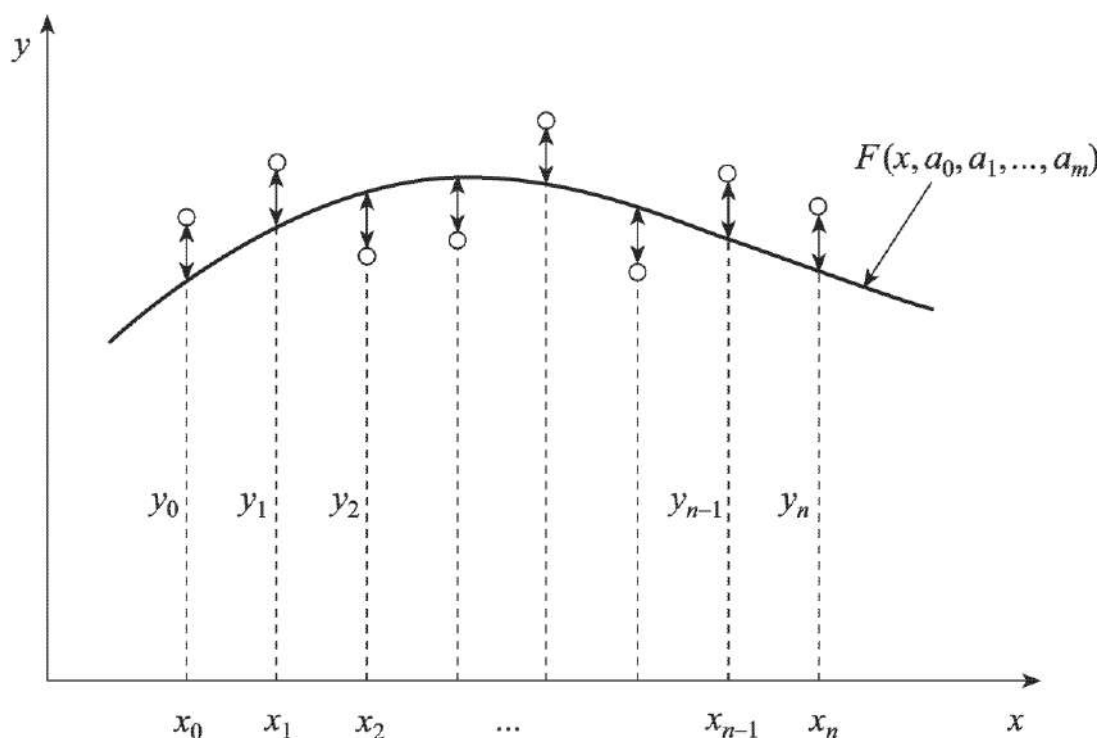


Рис. 1. Сглаживание функции

Одним из таких методов является метод наименьших квадратов (МНК).

Изложим суть метода наименьших квадратов для сглаживания экспериментальных данных [2].

Пусть дана экспериментальная таблица (1). Составим многочлен степени m ($m \ll n$).

Таблица 1

Экспериментальные значения

x_i	x_0	x_1		x_n
y_i	y_0	y_2		y_n

$$F(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \quad (1)$$

Будем полагать, что отклонение значений этого многочлена от заданных таблицей (1) значений $y_i, i = \overline{0, n}$, минимально в некотором среднеинтегральном смысле.

2. Численные примеры

Приведем результаты работы метода наименьших квадратов:

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-2x} \sin\left(\frac{1}{3}(1-x)\right) + 2$ и аппроксимируем ее многочленами различных степеней n , используя МНК для определения их коэффициентов.

В таблице 2 приведены оценки погрешностей ε_n , вычисленные для входного набора из 100 точек, а на рисунке 2 – аппроксимируемая функция и многочлены степени 4 и 5, соответственно:

Таблица 2

Погрешность аппроксимации для примера 1

n	2	4	6	8	10
ε	0.004985	0.000581	0.0000248	5.38e-07	1.25e-08

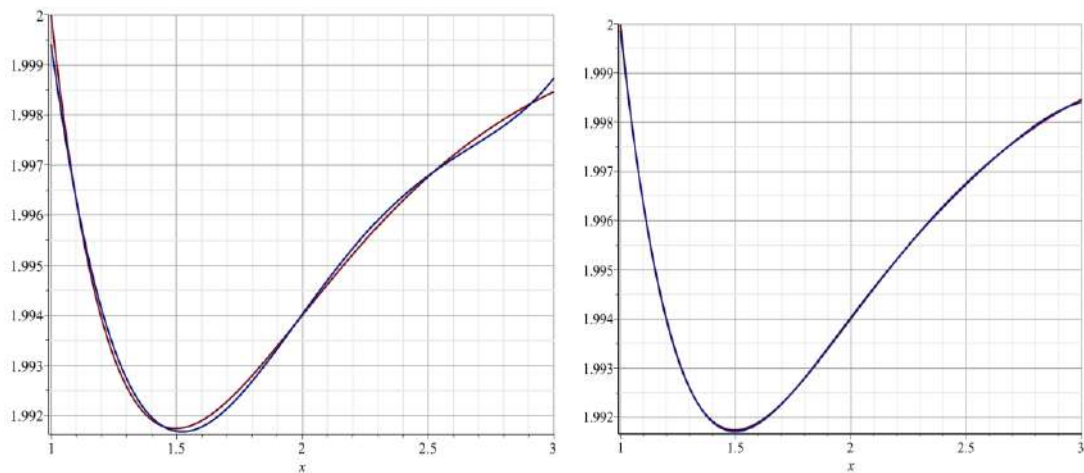


Рис. 2. Аппроксимируемая функция и многочлены степеней 4 и 5

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x \sin(4x)}{x^4 + 1}$ и аппроксимируем ее многочленами различных степеней n , используя МНК для определения их коэффициентов.

В таблице 3 приведены оценки погрешностей ε_n , вычисленные для входного набора из 500 точек, а на рисунке 3 – аппроксимируемая функция и многочлены степени 5 и 7, соответственно.

Таблица 3

Погрешность аппроксимации для примера 2

n	2	5	7	8	10
ε	0.1055	0.0066	0.00692	0.001896	6.2e-05

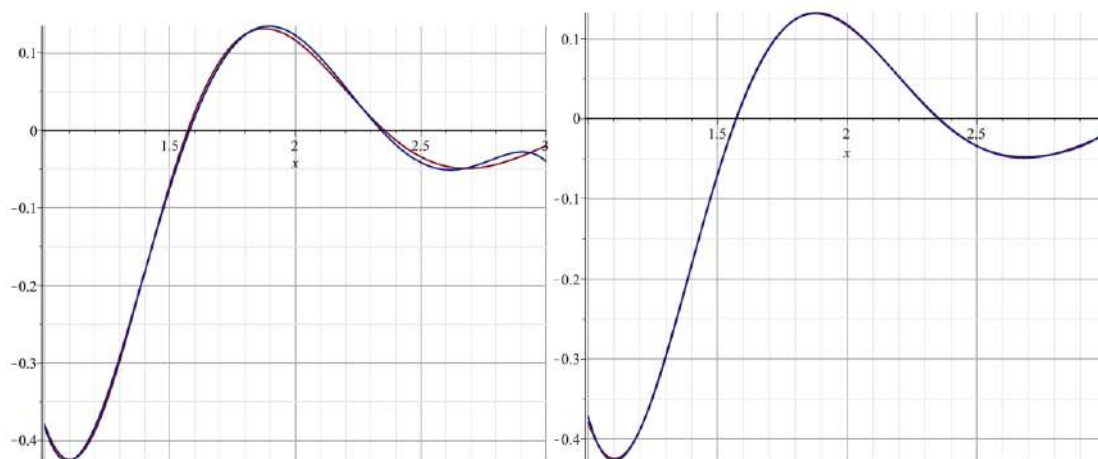


Рис. 3. Аппроксимируемая функция и многочлены степеней 5 и 7

Как видно из предложенных результатов, аппроксимация функции из примера 2 выполняется с меньшей точностью. Это обусловлено тем, что максимум модуля ее производной значительно выше, чем у функции в примере 1. Для преодоления этого обстоятельства и получения приемлемого качества аппроксимации требуется больше входных данных [3, 4].

Список литературы

1. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М. : Физматлит, 2004. 400 с.
2. Метод наименьших квадратов : метод. указания / сост.: Л. В. Коломиец, Н. Ю. Поникарова. Самара : Изд-во Самарского ун-та, 2017. 32 с.
3. Иванов А. И., Тарасов Д. В., Горбунов К. А. Оценки показателя Херста на малых выборках: простейший вариант нелинейного компенсатора методических ошибок Федера при моделировании данных экономики и биометрии // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 3. С. 50–54.
4. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares // Mathematics. 2024. № 12 (2). P. 227. doi: 10.3390/math12020227

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

Егор Сергеевич Липатов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
egorlipatov0@gmail.com

Аннотация. Решается задача определения узлов квадратурной формулы Гаусса. Приведена рекуррентная формула для многочленов Лежандра, описан способ определения нулей таких многочленов. Предложены результаты численных экспериментов для многочленов пятой и шестой степени.

Ключевые слова: многочлены Лежандра, квадратурная формула Гаусса, узлы, дихотомия

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF QUADRATURE FORMULAS OF THE HIGHEST ALGEBRAIC DEGREE OF ACCURACY

Egor S. Lipatov

Penza State University, Penza, Russia
egorlipatov0@gmail.com

Abstract. The paper solves the problem of determining the nodes of the Gauss quadrature formula. A recurrent formula for Legendre polynomials is given, and a method for determining the zeros of such polynomials is described. The results of numerical experiments for polynomials of the fifth and sixth degree are proposed.

Keywords: Legendre polynomials, Gauss quadrature formula, knots, dichotomy

1. Постановка задачи

Большое количество практических задач подразумевает необходимость численного интегрирования различных функций на отрезке. Для эффективного вычисления интегралов с заданной точностью используются различные квадратурные формулы. Одним из классов таких формул являются формулы наивысшей алгебраической степени точности, в которых в качестве узлов используются нули ортогональных многочленов [1]. В рамках данной работы решается задача определения параметров таких квадратурных формул. Возникает две задачи – определение нулей ортогональных многочленов и определение весовых коэффициентов.

В данной работе реализуется алгоритм нахождения всех корней многочленов Лежандра с заданной точностью.

2. Многочлены Лежандра

Рассмотрим систему многочленов Лежандра, ортогональных на отрезке $[-1;1]$ с весом $\rho(x) \equiv 1$.

Многочлен Лежандра – многочлен, который в наименьшей степени отклоняется от нуля в смысле среднего квадратического. Многочлены Лежандра удобно определять с помощью следующей рекуррентной формулы [2]:

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x,$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Задав полином Лежандра $P_n(x)$ нужной степени n по рекуррентной формуле (1), приступим к определению его нулей. Как известно, все n нулей являются различными действительными числами, принадлежащими отрезку $[-1,1]$.

Практически все стандартные методы приближенного решения уравнений предназначены для определения единственного корня на заданном отрезке. В связи с этим на предварительно необходимо выполнить процедуру отделения корней. Для отделения корней разобьем отрезок $[-1;1]$ на N частей равномерно распределенными точками x_k :

$$x_k = -1 + \frac{2k}{N}, k = 0, \dots, N.$$

Для каждого из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$, выполним проверку условия

$$P_n(x_{k-1})P_n(x_k) < 0,$$

обеспечивающего наличие корня на данном отрезке.

Дополнительно проверяется дополнительное условие

$$|P_n(x_{k-1})P_n(x_k)| \leq \varepsilon,$$

где ε – заданная точность определения корней. Его выполнение означает, что один из множителей близок к нулю, а значит, одна из границ x_{k-1} или x_k близка к корню. Если $|P_n(x_{k-1})| < \varepsilon$, то в качестве приближенного значения корня берем x_{k-1} . Если же $|P_n(x_k)| < \varepsilon$, то x_k .

При выполнении процедуры отделения корней необходимо следить за количеством корней. Если количество корней меньше n ,

то необходимо удвоить количество узлов в сетке. При этом для оптимизации процесса нахождения корней можно использовать свойство их симметричности относительно нуля.

В качестве метода определения одного корня на найденных отрезках, содержащих корни, будем использовать метод половинного деления (дихотомию).

3. Численные результаты

Проиллюстрируем работу описанного выше алгоритма на нескольких примерах многочленов различных степеней.

3.1. Определение корней $P_5(x)$

Рассмотрим многочлен Лежандра пятой степени

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Точным корнями этого многочлена являются числа

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}}, \xi_2 = -\sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}},$$

$$\xi_3 = 0, \xi_4 = \sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}}, \xi_5 = \sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}}.$$

В приведенной ниже таблице 1 покажем зависимость необходимого числа итераций $\mathbf{m}$ от заданной точности ε определения корней.

Таблица 1

Результаты численного эксперимента для $P_5(x)$

ε	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-15}
$\mathbf{m}$	14	23	30	35	46

3.2. Определение корней $P_6(x)$

Рассмотрим многочлен Лежандра шестой степени

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Точные значения корней этого многочлена не приводим ввиду их громоздкости.

В таблице 2 покажем зависимость необходимого числа итераций $\mathbf{m}$ от заданной точности ε определения корней [3–6].

Таблица 2

Результаты численного эксперимента для $P_6(x)$

ε	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-15}
m	14	21	28	34	45

Список литературы

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.
2. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М. : Наука, 1979. 832 с.
3. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares // Mathematics. 2024. № 12 (2). P. 227. doi: 10.3390/math12020227
4. Tynda A. N., Sidorov D. N. Inverse Problem for the Integral Dynamic Models with Discontinuous Kernels // Mathematics. 2022. № 10 (21). P. 3945. doi: 10.3390/math10213945
5. Tynda A., Sidorov D., Muftahov I. Numerical analysis of fractional order integral dynamical models with piecewise continuous kernels // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2020. Vol. 13, № 4. P. 58–65.
6. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564.

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Александра Александровна Якунина

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

alyaya_04@vk.com

Аннотация. Настоящая работа имеет обзорный характер и посвящена изучению вейвлетов – одного из математических инструментов, применяемых в теории приближения. Приведены основные определения и понятия, типы вейвлет-преобразований, примеры конкретных вейвлетов.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, преобразование Фурье, обработка сигнала, вейвлеты, вейвлет-преобразование

WAVELET ANALYSIS AND SIGNAL PROCESSING

Alexcandra A. Yakunina

Penza State University, Penza, Russia

alyaya_04@vk.com

Abstract. This work is of an overview nature and is devoted to the study of wavelets, one of the mathematical tools used in approximation theory. The basic definitions and concepts, types of wavelet transformations, and examples of specific wavelets are given.

Keywords: Wavelet analysis, Fourier transform, signal processing, wavelets, wavelet transform

1. Основные понятия

Вейвлет-преобразование – это преобразование, которое похоже на преобразование Фурье (или больше похоже на оконное преобразование Фурье) с другой функцией оценки [1]. Основное отличие заключается в том, что преобразование Фурье раскладывает сигнал на компоненты в виде синусов и косинусов, то есть функций, локализованных в пространстве Фурье, тогда как вейвлет-преобразование использует функции, локализованные как в реальном, так и в пространстве Фурье. В целом, вейвлет-преобразование может быть представлено следующим уравнением:

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{(a,b)}^*(x) dx$$

где $*$ – символ комплексной сопряженности и функция ψ – некоторая функция [1].

Как видно, вейвлет-преобразование фактически представляет собой бесконечное множество различных преобразований в зависимости от функции оценки, используемой для его вычисления. Это является основной причиной, по которой термин «вейвлет-преобразование» используется в самых разных ситуациях и для различных целей. Также существует множество типов классификации вариантов вейвлет-преобразования. Ортогональные вейвлеты используются для дискретного вейвлет-преобразования, а неортогональные – для непрерывного [2].

Эти два типа преобразования имеют следующие особенности:

1. Дискретное вейвлет-преобразование возвращает вектор данных той же длины, что и входной. Обычно, даже в этом векторе многие значения близки к нулю. Это связано с тем, что оно раскладывается на набор вейвлетов (функций), ортогональных к их параллельному переносу и масштабированию. Таким образом, мы разбиваем подобный сигнал на то же или меньшее количество коэффициентов вейвлет-спектра, равное количеству точек данных сигнала. Такой вейвлет-спектр хорошо подходит для обработки и сжатия сигналов, так как мы не получаем избыточной информации [1, 2].

2. Непрерывное вейвлет-преобразование, напротив, возвращает массив на одно измерение больше исходных данных. Для одномерных данных мы получаем изображение плоскости время-частота. Легко отследить изменение частот сигнала во время его продолжительности и сравнить этот спектр с другими сигналами. Так как здесь используется неортогональный набор вейвлетов, данные сильно коррелированы и имеют высокую избыточность. Это помогает увидеть результат в более доступном для человеческого восприятия виде [2].

Вейвлеты могут быть ортогональными, полуортогональными, биортогональными. Эти функции могут быть симметричными, асимметричными и несимметричными, с компактной областью определения или не имеющие таковой. Некоторые функции имеют аналитическое выражение, другие – быстрый алгоритм вычисления вейвлет-преобразования. Вейвлеты различают также степень гладкости. Основные вейвлетообразующие функции, или материнские вейвлеты [3]:

1) Вещественные непрерывные базисы: Гауссовы первого порядка, или WAVE-вейвлет; второго порядка, или MHAT-вейвлет («мексиканская шляпа» – Mexican hat); n -го порядка; DOG – Difference of Gaussians; LP – Littlewood & Paley;

2) Вещественные дискретные: HAAR-вейвлет, или вейвлеты Хаара; FHAT-вейвлет, или «французская шляпа» (French hat);

3) Комплексные: Морле (Morlet); Пауля (Paul).

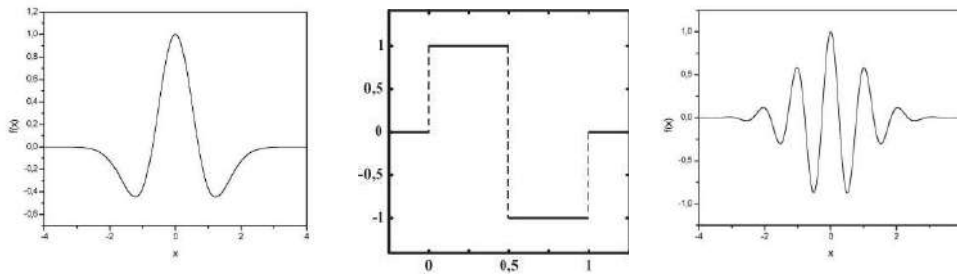


Рис. 1. «Мексиканская шляпа», вейвлет Хаара, вейвлет Морле

2. Прямые и обратные преобразования

Непрерывное вейвлет-преобразование основано на прямом использовании определения вейвлет-преобразования. Мы вычисляем свёртку сигнала с масштабированным вейвлетом для каждого масштаба. В результате получаем наборы данных той же длины N , что и входной сигнал [4].

Параметры сдвига и сжатия a, b при таком преобразовании непрерывно меняются вдоль $\mathbb{R}$, с ограничением $a \neq 0$. Вейвлет-преобразование задается формулой:

$$(T^{\text{вейв}} f)(a, b) = |a|^{-1/2} \int dt f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1)$$

Любая функция может быть восстановлена с помощью формулы обращения:

$$f = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da db}{a^2} \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b},$$

где $\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в L^2 . Постоянная C_{ψ} зависит только от ψ и дается формулой:

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1};$$

мы предполагаем, что $C_{\psi} < \infty$ (иначе формула (1) не имеет смысла). Если ψ – функция из $L^1(\mathbb{R})$ (как раз такие случаи представляют практический интерес), то $\hat{\psi}$ является непрерывным, тогда C_{ψ} может иметь конечное значение только если $\hat{\psi}(0) = 0$, т.е. $\int dx \psi(x) = 0$.

Дискретное вейвлет-преобразование оперирует с дискретными значениями параметров a и b , которые задаются, как правило, в виде степенных функций:

$$a = a_0^m, b = k \cdot a_0^m, m, k \in \mathbb{I},$$

где I – пространство целых чисел $\{-\infty, \infty\}$, m – параметр масштаба, $k = b \cdot a_0^m$ – параметр сдвига. Для a мы берём целые (положительные и отрицательные) степени фиксированного параметра $a_0 > 1$, т.е. $a = a_0^m$. Базис пространства $L_2(\mathbb{R})$ в дискретном представлении [5]:

$$\psi_{mk}(t) = |a_0|^{m/2} \psi(a_0^m t - k), m, k \in I, \psi(t) \in L_2(\mathbb{R}) \quad (2)$$

Вейвлет-коэффициенты прямого преобразования:

$$c_{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt$$

Обратное дискретное преобразование для непрерывных сигналов при ортогональном вейвлетном базисе пространства [6, 7]:

$$s(t) = \left(1/c_\psi\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{mk} \psi_{mk}(t).$$

Список литературы

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М. : РХД, 2001.
2. Юдин М. Н., Фарков Ю. А., Филатов Д. М. Введение в вейвлет-анализ. М. : РГГРУ имени Серго Орджоникидзе, 2001.
3. Ярмоленко А. С., Скобенко О. В. Использование вейвлетов в фильтрации и сжатии геоинформации. Полоцк : Полоцкий гос. ун-т, 2018.
4. Воробьёв В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб. : ВУС, 1999.
5. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564.
6. Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577.
7. Черушева Т. В. Обзор методов идентификации личности по речевому сигналу // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 97–101.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MATLAB

**Дмитрий Викторович Тарасов¹,
Вячеслав Владимирович Лапкин²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹tarasovdv@mail.ru, ²lapkin2001@inbox.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы построения сетки из конечных элементов для сложной двумерной области, например содержащей криволинейные стороны. Дискретизация области в методе конечных элементов зачастую требует построения разбиений, отвечающих требованию точности и скорости последующего расчета, поэтому использование инструментов с гибкими и удобными настройками во многом облегчает исследователю решение задачи. В частности, использование пакета MATLAB позволяет выполнить разбиение области и выгрузить сетки узлов и граней конечных элементов для интеграции с языками программирования.

Ключевые слова: метод конечных элементов, дискретизация области, MATLAB

DISCRETIZATION OF THE DOMAIN IN THE FINITE ELEMENT METHOD USING THE MATLAB PACKAGE

Dmitriy V. Tarasov¹, Vyacheslav V. Lapkin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
¹tarasovdv@mail.ru, ²lapkin2001@inbox.ru

Abstract. The issues of constructing a finite element grid for a complex two-dimensional domain, for example, containing curved sides, are considered. The discretization of the domain in the finite element method often requires the construction of partitions that meet the requirements of accuracy and speed of subsequent calculation, therefore, the use of tools with flexible and convenient settings greatly facilitates the researcher to solve the problem. In particular, using the MATLAB package allows you to split the area and upload grids of nodes and faces of finite elements for integration with programming languages.

Keywords: finite element method, domain discretization, MATLAB

Введение

Метод конечных элементов (МКЭ), как правило, применяют к решению краевых задач для дифференциальных уравнений и основан он на идее аппроксимации непрерывной функции дискретной моделью. Построение этой модели включает следующие шаги [1]:

1. Разбиение рассматриваемой области на конечное число точек, называемых узлами.
2. Определение неизвестных значений непрерывной функции в каждом узле.
3. Разделение области на элементы, которые имеют общие узлы и приближают форму исходной области.
4. Аппроксимация непрерывной функции на каждом элементе с помощью полинома, определяемого значениями функции в узлах элемента. Эти полиномы подбираются таким образом, чтобы обеспечить непрерывность функции.

В результате этих действий исходную задачу можно свести к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение этой системы намного проще, чем решение исходных дифференциальных уравнений, описывающих задачу.

Существуют программные системы, такие как ANSYS, Elcut, которые позволяют проводить все этапы метода МКЭ и последующий анализ для некоторых типовых задач. Но в случае разработки собственных программных решений (для не совсем типовых задач) [2, 3] на этапе дискретизации области можно использовать математический пакет MATLAB.

MATLAB (MATrix LABoratory) – это программное обеспечение для технических вычислений, разработанное компанией MathWorks. Он широко используется в различных областях науки, инженерии, математики и финансов.

Основные характеристики MATLAB:

- матричная ориентация: MATLAB оптимизирован для работы с матрицами и массивами, что делает его удобным для обработки больших объемов данных;
- встроенные функции: MATLAB имеет обширную библиотеку встроенных функций для различных операций, включая линейную алгебру, статистику, обработку сигналов и оптимизацию;
- интерпретируемый язык: MATLAB – это интерпретируемый язык, что означает, что он выполняет код построчно, без необходимости предварительной компиляции;
- графические возможности: MATLAB предоставляет мощные графические возможности для визуализации и анализа данных;

– интеграция с другими языками: MATLAB можно интегрировать с другими языками программирования, такими как C, C++, Java и Python, для расширения его функциональности.

Метод конечных элементов

Метод конечных элементов является мощным инструментом для моделирования поведения разнообразных физических систем, включая механические, тепловые, электрические и другие. Ключевым шагом в реализации МКЭ является построение сетки, которая представляет собой дискретизацию расчетной области на конечные элементы.

При решении задач методом конечных элементов используются элементы различных типов. Например, одномерные, двумерные и трёхмерные симплекс-элементы. Наиболее подробное рассмотрим разбиение дискретной модели двумерной области.

Для построения дискретной модели двумерной области используются два основных семейства элементов [1]: треугольники и четырёхугольники. Стороны линейных элементов каждого семейства представляют собой прямые линии. Квадратичные и кубические элементы могут иметь как прямолинейные, так и криволинейные стороны или те и другие. Возможность моделирования криволинейных границ достигается добавлением узлов в середину сторон элементов. Оба семейства элементов могут быть использованы одновременно внутри области, если только они имеют одинаковое число узлов на стороне.

Если у нас есть простая область для разбиения, мы можем построить сетку вручную, используя стандартные методы деления и распределения точек. Однако, если в области присутствуют сложные объекты или структуры, то ручное построение сетки может стать сложной и трудоемкой задачей. В таких случаях удобно воспользоваться программными инструментами, такими как Matlab, которые предоставляют богатые возможности для построения сложных сеток и автоматизации процесса разбиения области. Matlab позволяет эффективно работать с различными геометрическими формами и объектами, что делает процесс создания сеток более гибким и удобным.

Пример разбиения области, в которую включен круг приведён на рис. 1.

Количество элементов, необходимых для достижения хорошей точности при использовании метода конечных элементов, зависит от нескольких факторов, включая сложность геометрии области, характеристики материала, условия граничных условий и требуемая точность решения.

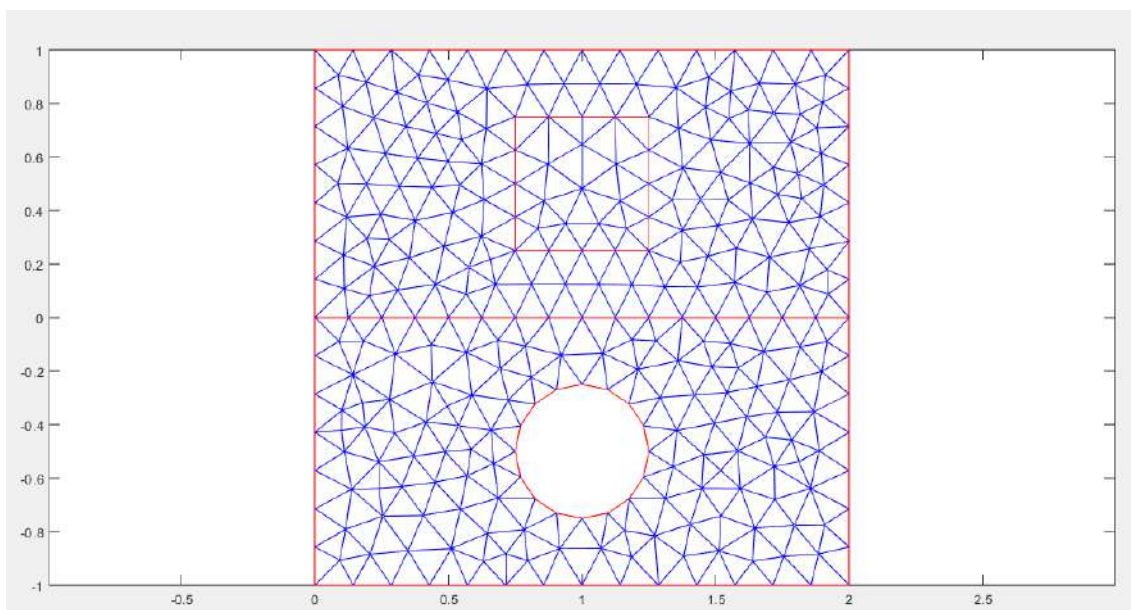


Рис. 1. Построение треугольных сеток в Matlab

Обычно для обеспечения хорошей точности требуется увеличить плотность сетки в областях с быстрыми изменениями решения или наличием сильных градиентов. В случае сложных геометрий или сильно неоднородных материалов может потребоваться использование более тонких элементов и более плотной сетки.

Оптимальное количество элементов определяется на практике путем проведения численных экспериментов, включая решение задачи с различными разбиениями сетки и анализом полученных результатов. Этот процесс позволяет определить оптимальное количество элементов для конкретной задачи и требуемой точности.

В Matlab имеется функция *initmesh*, позволяющая строить треугольные сетки в достаточно сложных двумерных областях [4]. Например, команды

$$[p,e,t]=initmesh('g', 'Hmax', 0.1); pdemesh(p,e,t), axis equal$$

Позволяют строить треугольную сетку в области, определяемой файлом геометрии *g*, и нарисовать её в графическом окне. Изменяя параметр *Hmax* можно добиться более точного приближения (рис. 2).

Построенная сетка позволяет не только достичь желаемого разбиения области, но и выгрузить сетки узлов и граней конечных элементов для последующей интеграции с языками программирования. Так каждая вершина будет представлена своими координаты (*x*, *y*), а каждый конечный элемент (треугольник) будет пронумерован и будет содержать набор составляющих его вершин (рис. 3).

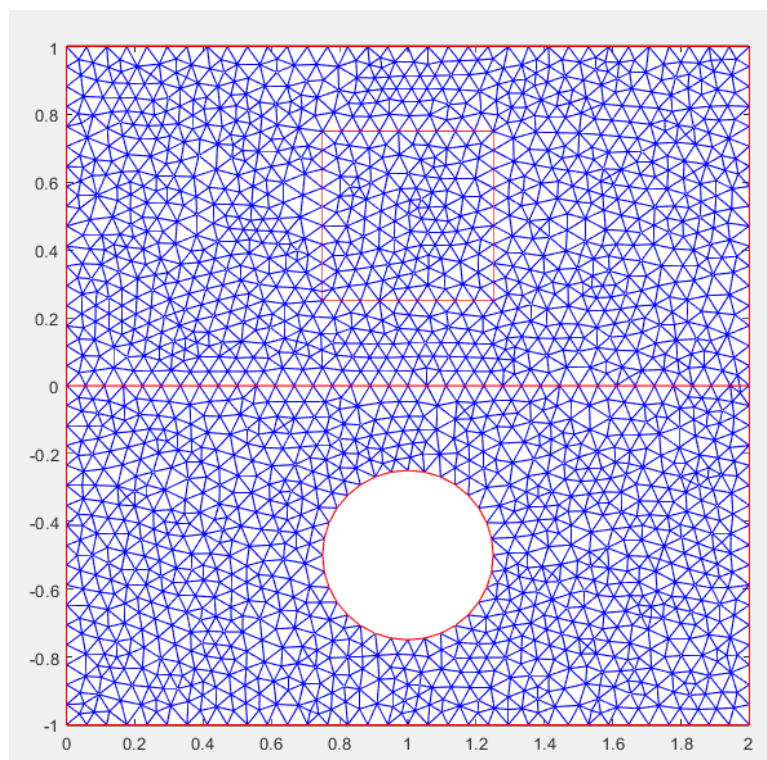


Рис. 2. Построение треугольных сеток в Matlab с более точным приближением

Подготовленный таким образом набор данных позволит привлечь (для расчетов матрицы жесткости аппроксимирующей СЛАУ) численные методы, выполненные на языках программирования, в частности C/C++. В целом, это может быть достигнуто выгрузкой необходимых данных в файл из пакета Matlab, и последующими этапами МКЭ, но реализованными уже на языке C/C++. В частности, здесь возможно и использование параллельного программирования для ускорения вычислений [5–7].

Editor - Untitled6.m Variables - p

2x312 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	0	1.2500	1.2500	0.7500	2	2	0.7500	0	0	0.7500	1	1.2500
2	-1	-1	0.7500	0.2500	0.2500	0	1	0.7500	0	1	-0.5000	-0.7500	-0.5000
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													

Рис. 3. Набор координат в пакете Matlab

Список литературы

1. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов. М., 1979. 392 с.
2. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564. doi: 10.15507/2079-6900.25.202301.554-564
3. Тарасов Д. В., Коннов Г. А. Применение метода конечных элементов для решения интегральных уравнений теории линейных антенн // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 1–4 декабря 2020 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. С. 66–74.
4. Даутов Р. З. Программирование МКЭ в MATLAB. Казань, 2010. 71 с.
5. Тарасов Д. В., Болотникова О. В., Тарасова Е. С. Численное решение задач вычислительной математики с использованием многопроцессорных вычислительных систем с общей памятью // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 20–22 мая 2015 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. С. 108–112.
6. Tynda A. N., Sidorov D. N. Inverse Problem for the Integral Dynamic Models with Discontinuous Kernels // Mathematics. 2022. № 10 (21). P. 3945. doi: 10.3390/math10213945
7. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares // Mathematics. 2024. № 12 (2). P. 227. doi: 10.3390/math12020227

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ГАВРИЛЬЯКА – НЕГАМИ В СРЕДЕ MATLAB

Даниил Денисович Соловьев¹,
Константин Михайлович Буданов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹densolo040303@qq.com, ²ko13bud@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается решение прямой задачи Гаврильяка – Негами в среде MatLab. Представлены результаты построения графиков при различных значениях части комплексной диэлектрической проницаемости. Приведена краткая информация об использованной среде.

Ключевые слова: MatLab, моделирование, Гаврильяк – Негами

SOLVING A DIRECT PROBLEM FOR THE HAVRILIAK-NEGAMI MODEL IN MATLAB

Daniil D. Solovev¹, Konstantin M. Budanov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹densolo040303@qq.com, ²ko13bud@rambler.ru

Abstract. The solution of the direct Gavriiliak – Negami problem in the MatLab environment is considered. The results of plotting at different values of the part of the complex dielectric constant are presented. Brief information about the environment used is provided.

Keywords: MatLab, modeling, Gavriilyak – Negami

Диэлектрическая проницаемость является важным свойством любого материала. Особый интерес представляют неоднородные материалы, полимеры, биологические объекты. Исследования диэлектрических свойств позволяет получить необходимую информацию об исследуемых материалах. Например, анализ биоимпеданса позволяет определить состав тела человека [1].

Характеристикой поляризуемости среды является комплексная диэлектрическая проницаемость, состоящая из действительной и мнимой частей. При этом действительная часть выражает способность среды к поляризации (смещению связанных зарядов под действием электрического поля), а мнимая часть характеризует потерю энергии электромагнитного поля, обусловленную поглощением.

Таким образом, задача состоит в определении вида частотной зависимости действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$.

Первая теория частотной зависимости диэлектрической проницаемости полярных диэлектриков была разработана Дебаем (1929 г.), далее её развитием занимались братья Коул, а также Дэвидсон.

Были предложены следующие модели:

а) модель Дебая [2]

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_D}{1 + i\omega\tau},$$

где ω — круговая частота; τ — время релаксации; ε_D — значение проницаемости при $\omega \rightarrow \infty$, ε_S — значение проницаемости при $\omega \rightarrow 0$;

б) модель братьев Коул [3]

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_D}{1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}},$$

где величина параметра α зависит от свойств материала и температуры, при этом $0 \leq \alpha < 1$;

в) модель Коула — Дэвидсона [4]

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_D}{(1 + i\omega\tau)^{1-\beta}},$$

где величина параметра β также зависит от свойств материала и температуры, при этом $0 \leq \beta < 1$;

Наконец, в 1966 г. Гаврильяк и Негами предложили модель вида [5]:

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_D}{(1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha})^{1-\beta}}$$

Можно показать, что в это случае, компоненты комплексной диэлектрической проницаемости будут иметь вид

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_D + (\varepsilon_S - \varepsilon_D)r^{-\beta} \cos \beta\varphi$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_D - (\varepsilon_S - \varepsilon_D)r^{-\beta} \sin \beta\varphi$$

где

$$r = \sqrt{\left(1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right)^2 + \left((\omega\tau)^{1-\alpha} \cos \frac{\pi\alpha}{2}\right)^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{(\omega\tau)^{1-\alpha} \cos \frac{\pi\alpha}{2}}{1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}}$$

Пригодность модели Гаврильяка-Негами можно оценить при сравнении результатов компьютерного моделирования с результатами, полученными через реальный эксперимент. В том числе данная модель может использоваться для анализа диэлектрических свойств биологических объектов [6].

В результате проведенных экспериментов с моделью в среде MatLab были получены зависимости искомых характеристик от частоты.

Ниже представлены графики зависимости компонентов диэлектрической проницаемости при заданных параметрах $\varepsilon_s = 10$, $\varepsilon_D = 3$, $\tau = 10^{-11}$, $\beta = 0,5$, $\alpha = 0,2$ на интервале частот $\omega = [10^8; 10^{14}]$ с шагом 10^8 (рис. 1).

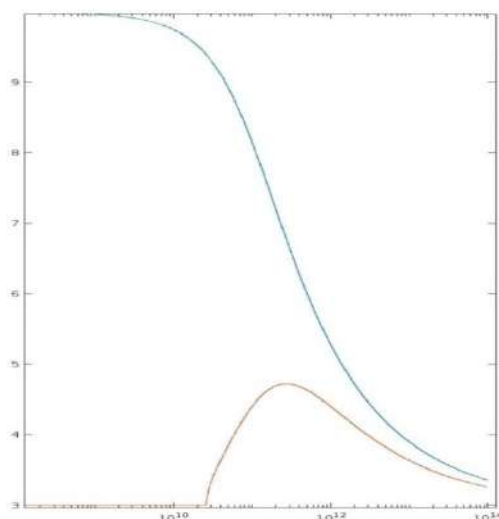


Рис. 1. График зависимости ε_1 и ε_2 от частоты ω при $\varepsilon_s = 10$

График зависимости при изменении значения ε_s на 1 и при неизменных значениях остальных параметров представлен на рисунке 2.

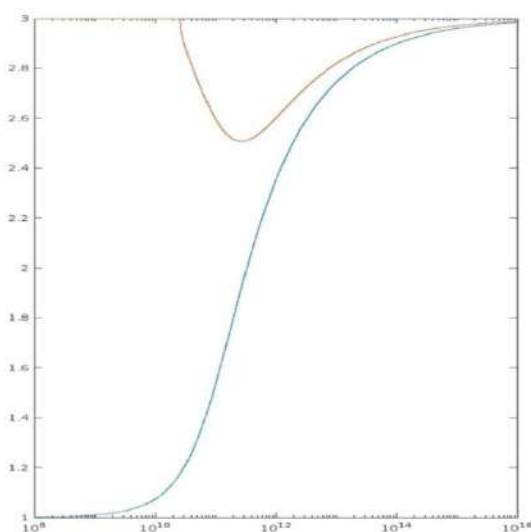


Рис. 2. График зависимости ε_1 и ε_2 от частоты ω при $\varepsilon_s = 1$

При уменьшении диапазона рассматриваемых частот до участка ω с 10^{10} до 10^{12} и уменьшении шага до 10^6 визуального улучшения качества рисунка не наблюдается (рис. 3).

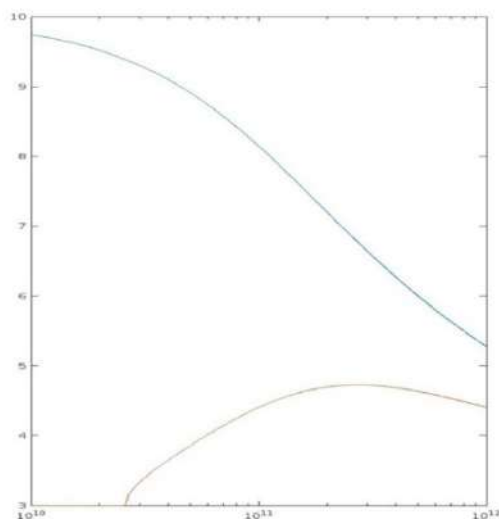


Рис. 3. График зависимости ε_1 и ε_2 от частоты ω при $\varepsilon_s = 1$ на участке $[10^{10}; 10^{12}]$

Как видно из рисунков, графики получились достаточно плавными и представлены в формате диэлектрического спектрометра.

Для решения задачи были использованы стандартные операторы MatLab. Искомые переменные (действительная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости) возвращаются в качестве массива, содержащего множество решений задачи на заданном отрезке частоты ω , и далее выводятся в виде графика. Представленные в данной статье графики были смоделированы в мобильной версии MatLab, работающей через удаленный сервер.

Список литературы

1. Николаев Д. В., Смирнов А. В., Бобринская И. Г., Руднев С. Г. Биоимпедансный анализ состава тела человека. М. : Наука, 2009. 392 с.
2. Дебай П. Полярные молекулы. М. ; Л. : ГНТИ, 1931. 241 с.
3. Cole K. S., Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics // J. Phys. Chem. 1941. Vol. 9. P. 341–351.
4. Davidson D. W., Cole R. H. Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol, and *n*-Propano// J. Chem. Phys. 1951. Vol. 19. P. 1484–1490.
5. Havriliak S., Negami S. A complex plane analysis of α -dispersions in some polymer systems // J. Polym. Sci. 1966. Vol. 14. P. 99.
6. Kuzmin A., Baranov V., Pushkareva A. Signal Processing in the Problem of Breast Tumors Detection by Impedansometry Method Based on Havriliak-Negami Model // 2024 26th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA). Moscow, Russian Federation, 2024. P. 1–5.

НЕКОТОРЫЙ КЛАСС ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЯДЕР ВОЛЬТЕРРА

Екатерина Дмитриевна Антипина

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН,
Иркутск, Россия

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
СО РАН, Иркутск, Россия
kate19961231@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача идентификации ядер Вольтерра в уравнениях с двумя переменными пределами интегрирования. Для выбранных видов уравнений выписаны их численные решения.

Ключевые слова: задача идентификации, несимметричное ядро Вольтерра, уравнение Вольтерра I рода

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00173).

SOME CLASS OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN THE PROBLEM OF IDENTIFICATION VOLTERRA KERNELS

Ekaterina D. Antipina

Irkutsk State University, Irkutsk, Russia
Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Irkutsk, Russia
kate19961231@gmail.com

Abstract. The problem of identification Volterra kernels in equations with two variable limits of integration is considered. For selected types of equations, their numerical solutions are written.

Keywords: identification problem, asymmetric Volterra kernel, Volterra equation of the first kind

Acknowledgments: the research was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project № 22-11-00173).

Введение

В настоящее время существует множество различных подходов для моделирования динамических процессов, протекающих в технических системах. Как правило, в основном применяют аппарат дифференциальных уравнений, а также аппарат интегральных уравнений [1]. В данной работе основной акцент сделан на интегро-степенных рядах Вольтерра, конечный отрезок которых имеет вид

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq p} f_{i_1 \dots i_m}(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$f_{i_1 \dots i_m}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_m}(s_1, \dots, s_m) \prod_{j=1}^m x_j(t - s_j) ds_j. \quad (2)$$

Здесь вход $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$ – вектор-функция времени, отклик $y(t)$ – скалярная функция времени, $K_{i_1 \dots i_m}$ – ядра Вольтерра (симметричны по переменным $s_1, \dots, s_m$, которые соответствуют совпадающим индексам $i_1 \dots i_m$).

В данной работе, в предположении, что задача декомпозиции отклика $y(t)$ решена, считаем, что нам известен входной сигнал $x(t)$, а также реакция $f_{i_1 \dots i_m}(t)$ на этот сигнал.

1. Двумерное интегральное уравнение с переменным нижним пределом типа $t - h$

Рассмотрим (1), когда $N = 2$, $p = 2$. Что касается ядер K_1 , K_2 , K_{11} , K_{22} , то их поиск был осуществлен в работе [2]. Здесь рассмотрим случай, когда функция K_{12} несимметрична относительно своих аргументов.

Выпишем уравнение вида

$$\int_0^t \int_0^t K_{12}(s_1, s_2) x(t - s_1) x(t - s_2) ds_1 ds_2 = f_{12}(t), \quad (3)$$

$$t \in [0, T], f_{12}(0) = 0.$$

Для идентификации K_{12} в (3) выберем однопараметрическое семейство входных возмущений x_1 и x_2 следующего вида:

$$\begin{cases} x_1(t) = e(t) - e(t - h), \\ x_2(t) = e(t - v) - e(t - v - h), \end{cases} t \in [h, T], v \leq t - h, \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_{1_v}(t) = e(t-v) - e(t-v-h), \\ x_2(t) = e(t) - e(t-h), \quad t \in [h, T], \quad v \leq t-h, \end{cases} \quad (5)$$

согласуя точки разрывов с узлами равномерной сетки. Здесь $h > 0$ – шаг дискретизации выходного сигнала, $T = Nh$, $e(t)$ – функция Хевисайда.

Подстановка (4), (5) в (3) дает уравнение, которое по терминологии [2] называется парным двумерным интегральным уравнением Вольтерра I рода

$$\int_{t-h}^t ds_1 \int_{t-v-h}^{t-v} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^{(1)}(t, v), \quad (6)$$

$$\int_{t-v-h}^{t-v} ds_1 \int_{t-h}^t K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^{(2)}(t, v). \quad (7)$$

Для численного решения (6), (7) применен адаптированный метод типа Рунге-Кутты [3]. С учетом равномерной сетки на $h \leq t \leq T$ вида

$$\begin{aligned} t_i &= ih, \quad i = \overline{1, n}, \quad v_j = jh, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad h = \frac{T}{n}, \\ t_{ip} &= t_i + ph, \quad p = \overline{1, m}, \quad 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m = 1, \\ v_{jq} &= v_j + qh, \quad q = \overline{1, m}, \quad 0 < v_1 < v_2 < \dots < v_m = 1, \end{aligned}$$

где m – число узлов на подсетке, численное решение имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{pk} b_{rl} K_{12}(t_{i-1,k}, t_{i-j-1,l}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{pk} a_{rl} K_{12}(t_{i-1,k}, t_{i-j,l}) + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{pk} b_{rl} K_{12}(t_{i,k}, t_{i-j-1,l}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{pk} a_{rl} K_{12}(t_{i,k}, t_{i-j,l}) = f^{(1)}(t_{ip}, v_{jq}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{pk} b_{rl} K_{12}(t_{i-j-1,k}, t_{i-1,l}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{pk} a_{rl} K_{12}(t_{i-j-1,k}, t_{i,l}) + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{pk} b_{rl} K_{12}(t_{i-j,k}, t_{i-1,l}) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{pk} a_{rl} K_{12}(t_{i-j,k}, t_{i,l}) = f^{(2)}(t_{ip}, v_{jq}), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$r = \begin{cases} p - q, & p > q, \\ m + p - q, & p \leq q, \end{cases}$$

$$a_{pk} = \int_0^{u_p} L_k(s)ds, \quad b_{pk} = \int_{u_p}^1 L_k(s)ds, \quad p = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, m},$$

$$L_k = \frac{\omega(t)}{(t - u_k)\omega'(u_k)}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \omega(t) = \prod_{k=1}^m (t - u_k).$$

Сходимость данного метода проиллюстрирована на тестовых примерах. Расчет показал третий порядок сходимости при $m = 3$.

2. Двумерное интегральное уравнение с переменным нижним пределом типа $t - v$

Подстановка в (3) следующей серии сигналов:

$$\begin{cases} x_{1_v}(t) = \begin{cases} 0, v = 0, \\ \frac{t}{v}, 0 \leq v \leq t \leq T, \\ 0, t \leq v, \end{cases} \\ x_{2_v}(t) = e(t - v), 0 \leq v \leq t \leq T, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1_v}(t) = e(t - v), 0 \leq v \leq t \leq T, \\ x_{2_v}(t) = \begin{cases} 0, v = 0, \\ \frac{t}{v}, 0 \leq v \leq t \leq T, \\ 0, t \leq v, \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

даст парное двумерное интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_{t-v}^t ds_1 \int_0^{t-v} \frac{t-s_1}{v} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^1(t, v), \quad (11)$$

$$\int_{t-v}^t ds_2 \int_0^{t-v} \frac{t-s_2}{v} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f_{12}^2(t, v), \quad 0 \leq v \leq t \leq T. \quad (12)$$

Численное решение для (11), (12) получено с помощью метода product integration [4]. С учетом равномерной сетки $t_i = ih$, $i = \overline{1, n}$, $v_j = jh$, $j = \overline{0, n-1}$, $nh = T$ и

$$m_{i,j} = \int_{(i-1)h}^{ih} ds_1 \int_{(j-1)h}^{jh} K_{12}(s_1, s_2) ds_2,$$

оно может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_{i,j}^p = & 8 \sum_{l=j+1}^{i-2} (l-j)(-1)^{i-l} f_{12}^p(t_l, t_{l-j}) - 6(i-j-1) f_{12}^p(t_{i-1}, t_{i-j-1}) + \\ & + 2(i-j) f_{12}^p(t_i, t_{i-j}), \quad i > j, j = 1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$m_{i,j}^p = 8 \sum_{l=j}^{i-2} \sum_{k=l-j}^{l-j+1} k(-1)^{i+j-k} f_{12}^p(t_l, t_k) + 6 \sum_{k=i-j-1}^{i-j} k(-1)^{i+j-k} f_{12}^p(t_{i-1}, t_k) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{i-j+1} k(-1)^{i+j+1} f_{12}^p(t_i, t_k), \quad i-j > 1, \quad (14)$$

$$m_{i,j}^p = 6 f_{12}^p(t_{i-1}, t_1) + 2 f_{12}^p(t_i, t_1) - 4 f_{12}^p(t_i, t_2), \quad i-j = 1, \quad (15)$$

где индекс $p = 1, 2$ соответствует (11) либо (12). Отметим, что сигналы вида (10) не позволяют получить отклики при одновременном изменении x_1 и x_2 , поэтому диагональные элементы будем восстанавливать на сигналах

$$\begin{cases} x_1(t) = e(t), \\ x_{2_v}(t) = e(t) - e(t-v), \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1_v}(t) = e(t) - e(t-v), \\ x_2(t) = e(t), \quad 0 \leq v \leq t \leq T. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда формула для диагональных элементов (методом product integration) принимает вид

$$m_{i,i} = \hat{f}_{12}(t_{i-1}, t_{i-1}) + \hat{f}_{12}^1(t_i, t_1) + \hat{f}_{12}^2(t_i, t_1) - \hat{f}_{12}(t_i, t_i), \quad (17)$$

где $\hat{f}_{12}(t_i, t_i)$, $\hat{f}_{12}^1(t_i, t_1)$, $\hat{f}_{12}^2(t_i, t_1)$ – отклики динамической системы на сигналы вида (13).

Формулы (13)–(15), (17) апробированы на тестовых примерах. Вычислительный эксперимент показал второй порядок сходимости.

3. Одномерное интегральное уравнение с двумя переменными пределами

Рассмотрим далее (1) при $N = 1$, $p = 1$, а также сделаем предположение, что система нестационарна, т.е.

$$\int_0^t K_1(t, s_1) x_1(s_1) ds_1 = f_1(t), \quad t \in [0, T], \quad f_1(0) = 0. \quad (18)$$

Ядро K_1 будем восстанавливать на сигналах вида

$$x_{1_v}(t) = \begin{cases} 0, & v = 0, \\ \frac{t}{v}, & 0 \leq t < v, \\ 1, & v \leq t. \end{cases} \quad (19)$$

Подстановка (19) в (18) даст [5]

$$\int_0^v \frac{s_1}{v} K_1(t, s_1) ds_1 + \int_v^t K_1(t, s_1) ds_1 = f_1(t, v), \quad 0 \leq v \leq t \leq T. \quad (20)$$

Численное решение (20) с учетом равномерной сетки $t_i = ih$, $i = \overline{1, n}$, $v_{j-1/2} = \left(j - \frac{1}{2}\right)h$, $j = \overline{1, n}$, $nh = T$ имеет следующий вид:

$$K^h(t_i, t_{i-1/2}) = -\frac{2(i-1)}{h} f_1(t_i, t_{i-1}) + \frac{2i}{h} f_1(t_i, t_i), \quad i = j, \quad (21)$$

$$K^h(t_i, t_{j-1/2}) = -\frac{2(j-1)}{h} f_1(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} f_1(t_i, t_j) - \frac{4i}{h} f_1(t_i, t_i), \quad i = j+1, \quad (22)$$

$$K^h(t_i, t_{j-1/2}) = -\frac{2(j-1)}{h} f_1(t_i, t_{j-1}) + \frac{6j}{h} f_1(t_i, t_j) + \\ + \frac{8}{h} \sum_{k=j+1}^{i-1} k(-1)^{k+j} f_1(t_i, t_k) + \frac{4i \cdot (-1)^{i+j}}{h} f_1(t_i, t_i), \quad i \geq j+2. \quad (23)$$

Расчеты по (21)–(23) на тестовых примерах показали, что данная численная схема имеет первый порядок сходимости, поэтому для повышения порядка сходимости для численного решения (20) был применен метод product integration. С учетом аналогичной сетки и обозначения

$$m_{i,j} = \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(ih, s_1) ds_1,$$

численное решение для (20) методом product integration имеет вид

$$m_{i,i} = -2(i-1) f_1(t_i, t_{i-1}) + 2i \cdot f_1(t_i, t_i), \quad i = j, \quad (24)$$

$$m_{i,j} = -2(j-1) f_1(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot f_1(t_i, t_j) - 4i \cdot f_1(t_i, t_i), \quad i = j+1, \quad (25)$$

$$m_{i,j} = -2(j-1) f_1(t_i, t_{j-1}) + 6j \cdot f_1(t_i, t_j) + \\ + 8 \sum_{k=j+1}^{i-1} k(-1)^{k+j} f_1(t_i, t_k) + 4i \cdot (-1)^{i+j} \cdot f_1(t_i, t_i), \quad i \geq j+2. \quad (26)$$

В этом случае схема (24)–(26) показала второй порядок сходимости.

Заключение

Статья посвящена некоторым нестандартным интегральным уравнениям Вольтерра I рода, связанным с задачей идентификации переходных характеристик динамической системы типа «вход-выход». Приведены численные решения представленных уравнений.

Список литературы

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наук. думка, 1986. 543 с.
2. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория чисел и численные методы. Новосибирск : Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1999. 193 с.
3. Hoog F., Weiss R. On the solution of Volterra integral equations of the first kind // Numer. Math. 1973. Vol. 21. P. 22–32.
4. Linz P. Product Integration Method for Volterra Integral Equations of the First Kind // BIT. 1971. Vol. 11. P. 413–421.
5. Solodusha S. V. On a class of the first kind Volterra equations in a problem of identification of a linear nonstationary dynamic system // Russian Universities Reports. Mathematics. 2023. Vol. 28, № 144. P. 406–413.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА
РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА**

**Ирина Сергеевна Казакова¹,
Руслан Викторович Жалнин²,
Владимир Федорович Тишкин³**

¹Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

^{2,3}Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия

¹iskazakova1202@gmail.com, ²zhrv@mrsu.ru, ³v.f.tishkin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается локальный разрывный метод Галеркина (РМГ). Вводятся три варианта расчета дискретных потоков между ячейками, затем на серии тестовых трехмерных задач теплопроводности апробируется разработанный вычислительный алгоритм, также проводится анализ порядков точности РМГ.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, задача теплопроводности, дискретные потоки, порядок точности, граничные условия

**STUDY OF ONE COMPUTATIONAL ALGORITHM
FOR SOLVING 3D HEAT CONDUCTION PROBLEMS USING
THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD**

Irina S. Kazakova¹, Ruslan V. Zhalnin², Vladimir F. Tishkin³

¹National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

^{2,3}Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy
of Sciences, Moscow, Russia

¹iskazakova1202@gmail.com, ²zhrv@mrsu.ru, ³v.f.tishkin@mail.ru

Abstract. The local discontinuous Galerkin method (DGM) is considered. Three options for calculating discrete flows between cells are introduced, then the developed computational algorithm is tested on a series of test three-dimensional heat conduction problems, and the order of accuracy of the DGM is also analyzed.

Keywords: discontinuous Galerkin method, heat conduction problem, discrete flows, order of accuracy, boundary conditions

1. Введение

Для развития науки большое значение имеет успешное решение различных прикладных задач, в том числе задач теплопроводности.

Данная работа посвящена разработке вычислительного алгоритма метода Галёркина с разрывными базисными функциями для решения задач теплопроводности в трёхмерном случае, его тестировании на подобранных задачах и анализу полученных результатов.

2. Алгоритм локального разрывного метода Галёркина

Согласно [1], разрывный метод Галёркина (РМГ) – класс методов конечных элементов, использующих полностью разрывное кусочно-полиномиальное пространство для численного решения задач. Ключевым компонентом РМГ является обработка границ между элементами.

Приведём формулировку локального РМГ, опираясь на работу [1], на примере одномерного уравнения теплопроводности для $x \in [0, 2\pi]$:

$$u_t - u_{xx} = 0. \quad (1)$$

Обозначим через $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, где $j = \overline{1, N}$, сетку на отрезке $[0, 2\pi]$, где $x_{1/2} = 0$, $x_{N+1/2} = 2\pi$. Центры ячеек обозначим как $x_j = 0.5 * (x_{j-1/2} + x_{j+1/2})$.

Если переписать уравнение теплопроводности (1) в виде:

$$u_t - q_x = 0, q - u_x = 0, \quad (2)$$

то получаем следующую вычислительную схему: найти решения u, q такие, что для всех пробных функций v, w справедливо:

$$\int_{I_j} u_t v \, dx + \int_{I_j} q v_x \, dx - \hat{q}_{j+1/2} v_{j+1/2}^- + \hat{q}_{j-1/2} v_{j-1/2}^+ = 0, \quad (3)$$

$$\int_{I_j} q w \, dx + \int_{I_j} u w_x \, dx - \hat{u}_{j+\frac{1}{2}} w_{j+\frac{1}{2}}^- + \hat{u}_{j-\frac{1}{2}} w_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0, \quad (4)$$

где лучшим выбором для потоков, согласно работе [1], будут соотношения:

$$\hat{u}_{j+1/2} = u_{j+1/2}^+, \hat{q}_{j+1/2} = q_{j+1/2}^-, \quad (5)$$

$$\hat{u}_{j+1/2} = u_{j+1/2}^-, \hat{q}_{j+1/2} = q_{j+1/2}^+. \quad (6)$$

Соотношения (3)–(4) суть локальный РМГ для решения уравнения теплопроводности (1), дающий адекватные численные результаты. В источнике [1] приведены значения порядков точности локального РМГ, они достигают $k + 1$ при $k = 1$ и $k = 2$, где k – степень полинома.

Также будут использоваться три варианта расчёта дискретных потоков между ячейками. Первый вариант использует центральный поток для температуры T :

$$\hat{T}_{j+1/2} = 0.5 * (T_{j+1/2}^- + T_{j+1/2}^+), \quad (7)$$

а для компонент градиента температуры q – вариант с использованием стабилизирующих добавок, как в источнике [2]:

$$q^\Gamma(T^+, T^-, n) = q + C_{11}((T^+ - T^-), n), \quad (8)$$

где величина T^- вычисляется на границе элемента по значениям внутри, а величины T^+ – на границе по значениям в соседней ячейке или в соответствии с граничными условиями, при этом n – единичная нормаль к грани элемента.

Второй и третий варианты опираются на использование соотношений (5)–(6). То есть во втором варианте T вычисляется по внешним значениям, а q – по значениям внутри элемента, а в третьем – наоборот, для T берутся внутренние значения, а для q – внешние.

3. Решение тестовых задач теплопроводности локальным разрывным методом Галёркина. Вычисление порядка точности метода

В рамках данной работы были решены три задачи теплопроводности в трёхмерной постановке из источников [2–4] на единичном кубе:

1. Начально-краевая задача с граничным условием II рода [3]:

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}, 0 < x, y, z < 1, t > 0, \\ T(0, x, y, z) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z), \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Она имеет аналитическое решение:

$$T(t, x, y, z) = e^{-3\pi^2 t} \cos \pi x \cos \pi y \cos \pi z.$$

2. Начально-краевая задача с граничными условиями I и II рода [4]:

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}, 0 < x, y, z < 1, t > 0, \\ T(0, x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2, \omega|_{x=0} = \omega|_{y=0} = \omega|_{z=0} = 0, \\ T(t, 1, y, z) = T(t, x, 1, z) = T(t, x, y, 1) = 1 + x^2 + y^2 + z^2. \end{cases} \quad (10)$$

3. Начально-краевая задача с граничным условием I рода [2]:

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}, 0 < x, y, z < 1, t > 0, \\ T(0, x, y, z) = 0, T(t, 0, y, z) = T(t, 1, y, z) = T(t, x, 0, z) = \\ = T(t, x, 1, z) = T(t, x, y, 1) = 0, T(t, x, y, 0) = 1. \end{cases} \quad (11)$$

В соотношениях (9)–(11) ω обозначает тепловой поток. Время, до которого ведётся расчёт задач, составляет $t_{max} = 0.005$.

Задачи (9)–(11) были решены с помощью модуля, реализующего РМГ с тремя вариантами дискретных потоков, в рамках проекта [5]. Для решения была использована равномерная кубическая сетка с пространственными шагами $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ с одним и тем же числом Куранта.

Сведём полученные результаты в таблицы. В табл. 1–3 представлены ошибки численного решения тестовой задачи (9) и порядок точности РМГ в нормах C , L_1 и L_2 для трёх различных вариантов расчёта дискретных потоков между ячейками, соответственно. Таблица 4 и 5 содержат порядки точности РМГ на задачах (10)–(11), рассчитанные в трёх нормах с тремя и двумя вариантами дискретных потоков, соответственно. N – количество ячеек в расчётной сетке.

Таблица 1

Ошибки численного решения и порядок точности РМГ на задаче № 1 при использовании центрального потока со стабилизирующими добавками

N	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	r	Ошибка	r	Ошибка	r
125	$6.841 \cdot 10^{-2}$	–	$3.392 \cdot 10^{-3}$	–	$9.915 \cdot 10^{-3}$	–
1000	$6.61 \cdot 10^{-2}$	0.05	$3.203 \cdot 10^{-3}$	0.082	$7.363 \cdot 10^{-3}$	0.429
8000	$5.041 \cdot 10^{-2}$	0.391	$2.397 \cdot 10^{-3}$	0.418	$5.194 \cdot 10^{-3}$	0.504
64000	$3.131 \cdot 10^{-2}$	0.687	$1.57 \cdot 10^{-3}$	0.61	$3.277 \cdot 10^{-3}$	0.664

Таблица 2

Ошибки численного решения и порядок точности РМГ на задаче №1 при использовании комбинированного потока с T^+ и qx^-, qu^- и qz^-

N	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	r	Ошибка	r	Ошибка	r
125	$1.447 \cdot 10^{-1}$	–	$6.596 \cdot 10^{-3}$	–	$1.691 \cdot 10^{-2}$	–
1000	$7.809 \cdot 10^{-2}$	0.89	$3.681 \cdot 10^{-3}$	0.842	$7.068 \cdot 10^{-3}$	1.258
8000	$1.118 \cdot 10^{-1}$	–0.518	$2.392 \cdot 10^{-3}$	0.622	$5.659 \cdot 10^{-3}$	0.321
64000	$1.254 \cdot 10^{-1}$	–0.166	$2.448 \cdot 10^{-3}$	–0.034	$6.415 \cdot 10^{-3}$	–0.181

Таблица 3

Ошибки численного решения и порядок точности РМГ на задаче № 1 при использовании комбинированного потока с T^- и qx^+, qu^+ и qz^+

N	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	r	Ошибка	r	Ошибка	r
125	$7.557 \cdot 10^{-2}$	–	$6.058 \cdot 10^{-3}$	–	$1.441 \cdot 10^{-2}$	–
1000	$2.788 \cdot 10^{-2}$	1.439	$3.226 \cdot 10^{-3}$	0.909	$5.257 \cdot 10^{-3}$	1.455
8000	$8.66 \cdot 10^{-3}$	1.687	$1.056 \cdot 10^{-3}$	1.611	$1.581 \cdot 10^{-3}$	1.734
64000	$2.415 \cdot 10^{-3}$	1.842	$3.03 \cdot 10^{-4}$	1.804	$4.33 \cdot 10^{-4}$	1.867

Таблица 4

Порядок точности РМГ на задаче №2

N	Норма	r_C			r_{L_1}			r_{L_2}		
	Поток	1	2	3	1	2	3	1	2	3
125		—			—			—		
1000										
8000		0.171	1.328	0.775	0.291	1.527	1.03	0.275	1.686	0.98
64000		1.151	1.135	0.755	0.352	1.419	0.727	0.507	1.478	0.779

Таблица 5

Порядок точности РМГ на задаче № 3

N	Норма	r_C		r_{L_1}		r_{L_2}	
	Поток	1	2	1	2	1	2
125		—		—		—	
1000							
8000		−0.069	0.726	0.234	1.651	0.159	1.715
64000		0.571	−0.296	0.55	1.775	0.541	1.254

Проанализируем полученные результаты. В первой задаче (9) для всех вариантов расчёта дискретных потоков ошибки численного решения при любых значениях h , вычисленные в интегральных нормах, на порядок меньше, чем в норме C . Для второго варианта вычисления потоков, где используются T^+ и q^- , порядки точности существенно меньше, чем для третьего варианта, причём при измельчении сетки они принимают отрицательные значения, так что данный метод не целесообразно применять для решения задачи (9). Это обусловлено видом краевых условий для данной задачи. Для задач с граничным условием II рода имеет смысл применять третий вариант вычисления потоков с T^- и q^+ .

Вторая задача (10) даёт наихудшие порядки точности при использовании центральных дискретных потоков. Так как в данной задаче используются граничные условия I и II рода, то комбинированные варианты потоков дают более хорошие результаты, причём для второго потока точность выше при любых h . В данной задаче граничные условия, накладываемые на температуру, имеют решающее значение по сравнению с граничными условиями II рода.

Для решения третьей задачи (11) третий вариант метода расчёта потоков не подходит, поскольку совсем не учитывает заданные граничные условия I рода. Таким образом, для данной задачи применимы только первый и второй методы вычисления потоков. Но решение данной задачи на крупных сетках с использованием центральных потоков не является целесообразным. Второй вариант вычисления дискретных

потоков даёт неплохие порядки точности, которые в интегральных нормах почти достигают 2, поэтому данный метод вычисления потоков является более предпочтительным при решении задачи (11).

4. Заключение

Разработанный вычислительный алгоритм РМГ с тремя вариантами расчёта дискретных потоков между ячейками [5] был успешно применён для решения подобранных трёхмерных задач теплопроводности. Но только в процессе проведения численных экспериментов можно найти компромиссный вариант решения конкретной задачи, который давал бы достаточную точность решения. Также заметно, что РМГ с комбинированным вариантом расчёта потоков согласно соотношениям (5)–(6) на начально-краевых задачах с граничными условиями I или II рода имеет более высокие порядки точности, чем при использовании центрального потока со стабилизирующими добавками (7)–(8), но последний вариант универсальнее и не столь зависит от граничных условий. Для выбора комбинированного потока важно учитывать, какие параметры заданы на границе тела – температура или компоненты градиента температуры.

Список литературы

1. Zhang M., Shu C.-W. An Analysis of Three Different Formulations of the Discontinuous Galerkin Method for Diffusion Equations // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2011. № 13 (03). 25 p.
2. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В. Современные вычислительные методы прикладной математики : учеб. пособие. Саранск : Изд-во СВМО, 2019. 87 с.
3. Галанин М. П., Прошунин Н. Н., Родин А. С., Сорокин Д. Л. Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2016. № 66. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-66> (дата обращения: 15.04.2024).
4. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2015. Т. 19, № 3. С. 523–533. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/reshenie-trehmernyh-uravneniy-teploprovodnosti-s-pomoschyu-razryvnogo-metoda-galyorkina-na-nestrukturirovannyh-setkah> (дата обращения: 15.04.2024).
5. CHARM_3D, version 2 with DGM for solving heat equations. URL: https://github.com/zhrv/charm_3d_v2/tree/heat-fem-dg

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СВЯЗАННЫХ
ТЕ-ТЕ-ВОЛН В ПЛОСКОМ НЕЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОДЕ,
ЗАПОЛНЕННОМ МЕТАМАТЕРИАЛОМ**

**Валерия Юрьевна Мартынова¹,
Станислав Вячеславович Тихов²,
Олег Владимирович Кондырев³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹lynxbax@mail.ru, ²tik.stanislav2015@yandex.ru,

³kow20002204@mail.ru

Аннотация. Рассматривается нелинейная задача, которая описывает распространение электромагнитных монохроматических связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском нелинейном волноводе, заполненном метаматериалом. Предложен численный метод для поиска постоянных задачи распространения.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, двухпараметрическая задача, распространение электромагнитных волн, ТЕ-ТЕ-волны, плоский диэлектрический волновод, нелинейная среда, метаматериал

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-71-00020. URL: <https://rscf.ru/project/22-71-00020/>)

**A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM
OF PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC MONOCHROMATIC
COUPLED TE-TE WAVES IN A PLANAR NONLINEAR
WAVEGUIDE FILLED WITH A METAMATERIAL**

**Valeria Yu. Martynova¹, Stanislav V. Tikhov²,
Oleg V. Kondyrev³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹lynxbax@mail.ru, ²tik.stanislav2015@yandex.ru,

³kow20002204@mail.ru

Abstract. A nonlinear problem is considered that describes the propagation of electromagnetic monochromatic coupled TE-TE waves in a planar nonlinear waveguide filled with a metamaterial. A numerical method is proposed to find the propagation constants of the problem.

Keywords: nonlinear boundary problem, two-parameter problem, electromagnetic wave propagation, TE-waves, planar dielectric waveguide, nonlinear medium, metamaterial

Funding: This study is supported by the Russian Science Foundation under grant 22-71-00020, <https://rscf.ru/en/project/22-71-00020>.

Введение

Изучение и анализ распространения электромагнитных волн в нелинейных средах, является важной задачей в области электродинамики и оптики [1]. Применение волноводов с особыми характеристиками может найти практическое применение в современных устройствах и системах связи [2]. В настоящей статье мы рассмотрим распространение электромагнитных монохроматических связанных ТЕ-ТЕ-волн [3] в плоском нелинейном волноводе, заполненном метаматериалом.

В данной статье будет рассмотрен алгоритм численного решения описанной задачи. Для этого мы выведем систему характеристических уравнений с помощью условий на границе и, решив их, получим две дисперсионные кривые. Анализируя кривые выпишем постоянные распространения, которые описывают поведение волн в волноводе.

1. Постановка задачи

Положим $I=(0,h)$, $\bar{I}=[0,h]$, где $h>0$ – известная постоянная. Возьмем электромагнитную связанную ТЕ-ТЕ-волну $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, которая распространяются в плоском заполненном метаматериалом экранированном волноводе $\Sigma=\{(x,y,z): 0\leq x\leq h, (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$ вдоль его границ y и z соответственно, где комплексные амплитуда задаются как

$$\mathbf{E}=\left(0, E_y(x)e^{i\gamma z}, E_z(x)e^{i\gamma y}\right)^T, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}=\left(H_{1x}(x)e^{i\gamma z}+H_{2x}(x)e^{i\gamma y}, H_y(x)e^{i\gamma y}, H_z(x)e^{i\gamma z}\right)^T,$$

ω – круговая частота, γ – неизвестная постоянная распространения. Диэлектрическая проницаемость среды ϵ имеет вид

$$\epsilon=\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1+\bar{\alpha}_1 E_y^2+\bar{\alpha}_3 E_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2+\bar{\alpha}_4 E_y^2+\bar{\alpha}_2 E_z^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4 < 0$ – постоянные, а элемент $*$ не влияет на распространение волны.

Комплексные амплитуды $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}$, $\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}$, где ϵ_0, μ_0 есть диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость вакуума, а $\mu < 0$ – это известная постоянная. Компоненты E_y, E_z обращаются в нуль на границе $x=0$ и $x=h$. Также мы считаем фиксированным значение

$\|\mathbf{H}\|_{x=0} = B$ можно показать, что это требование эквивалентно условию

$$(\omega\mu\mu_0)^{-2} \left((E'_y)^2 + (E'_z)^2 \right) \Big|_{x=0} = B^2.$$

Далее подставим амплитуды $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в уравнения Максвелла и с помощью обозначений $a_j = \omega^2 \mu \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_j > 0$, $\lambda = \gamma^2$, $\alpha_j = \omega^2 \mu \mu_0 \epsilon_0 \bar{\alpha}_j > 0$, $\alpha_{j+2} = \omega^2 \mu \mu_0 \epsilon_0 \bar{\alpha}_{j+2}$, $j=1,2$ и $u_1 = E_y$, $u_2 = E_z$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} u_1'' = -(a_1 - \lambda + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_3 u_2^2) u_1 \\ u_2'' = -(a_2 - \lambda + \alpha_4 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2) u_2 \end{cases} \quad (3)$$

где $u_1 \equiv u_1(x)$, $u_2 \equiv u_2(x)$ $x \in \bar{I}$.

Из условий, накладываемых на электромагнитную волну, получаются условия на границах

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$u_1'|_{x=0} = A_1, \quad u_2'|_{x=0} = A_2, \quad (5)$$

$$u_1|_{x=h} = 0, \quad u_2|_{x=h} = 0; \quad (6)$$

Пусть $E'_y|_{x=0} = A_1$ и $E'_z|_{x=0} = A_2$, $A^2 = (\omega\mu\mu_0)^2 B^2$. Используя условие (5) получаем равенство, необходимое для существования нетривиального решения задачи

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2. \quad (7)$$

Наша задача состоит в поиске таких чисел $(\lambda, A_1, A_2) = (\hat{\lambda}, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ для фиксированного значения A , при которых существуют функции $u_1, u_2 \in C^2(\bar{I})$, удовлетворяющие системе уравнений (3) и условиям (4)–(7).

Данная задача является двухпараметрической задачей нового типа, поскольку есть только один спектральный параметр λ , и при этом, согласно (1), для A_2 справедливо, что $A_2 = \sqrt{A^2 - A_1^2}$, а A_1 подбирается так, чтобы решение задачи было нетривиальным [4, 5].

2. Численные результаты

Можно доказать, что задача Коши системы (3) с начальными условиями (4), (5) однозначно глобально разрешима при $x \in \bar{I}$, а ее

решение $u_1 \equiv u_1(x; \lambda, A_1)$, $u_2 \equiv u_2(x; \lambda, A_2)$ непрерывно зависит от параметров $(x; \lambda, A_1) \in \bar{I} \times (-\infty, +\infty) \times (0, A)$ [6].

С помощью условия (6) получим систему характеристических уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1(\lambda, A_1) \equiv u_1(h; \lambda, A_1) = 0, \\ \Delta_2(\lambda, A_2) \equiv u_2(h; \lambda, A_2) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $u_1(h; \lambda, A_1)$ и $u_2(h; \lambda, A_2)$ вычисляются при решении задачи Коши (3)–(5).

Пусть λ_h , A_h – шаги разбиения, λ_1 , λ_2 – фиксированные числа, обозначающие границы поиска. Введем сетку

$$\left\{ (\lambda^i, A_1^j) : \lambda_h = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{n}; \lambda^i = \lambda_1 + i\lambda_h; i = 0, 1, \dots, n; A_h = \frac{A}{m}; A_1^j = jA_h; j = 1, 2, \dots, m-1 \right\}.$$

Решая задачу Коши (3)–(5) для каждого узла сетки, находим решения $u_1(h; \lambda^i, A_1^j)$, $u_2(h; \lambda^i, A_1^j)$. Так как решения непрерывно зависят от λ , A_1 , то, если $\Delta_1(\lambda^i, A_1^j) * \Delta_1(\lambda^i, A_1^{j+1}) \leq 0$, то существует точка $(\lambda^i, \hat{A}_1)$, где $\hat{A}_1 \in (A_1^j, A_1^{j+1})$, такая, что $\Delta_1(\lambda^i, \hat{A}_1) = 0$ и если $\Delta_1(\lambda^i, A_1^j) * \Delta_1(\lambda^{i+1}, A_1^j) \leq 0$, то существует точка $(\hat{\lambda}, A_1^j)$, где $\hat{\lambda} \in (\lambda^i, \lambda^{i+1})$, такая, что $\Delta_1(\hat{\lambda}, A_1^j) = 0$. В итоге получим множество решений первого уравнения, изображенное синей кривой на плоскости $OA_1\lambda$ на рис. 1.

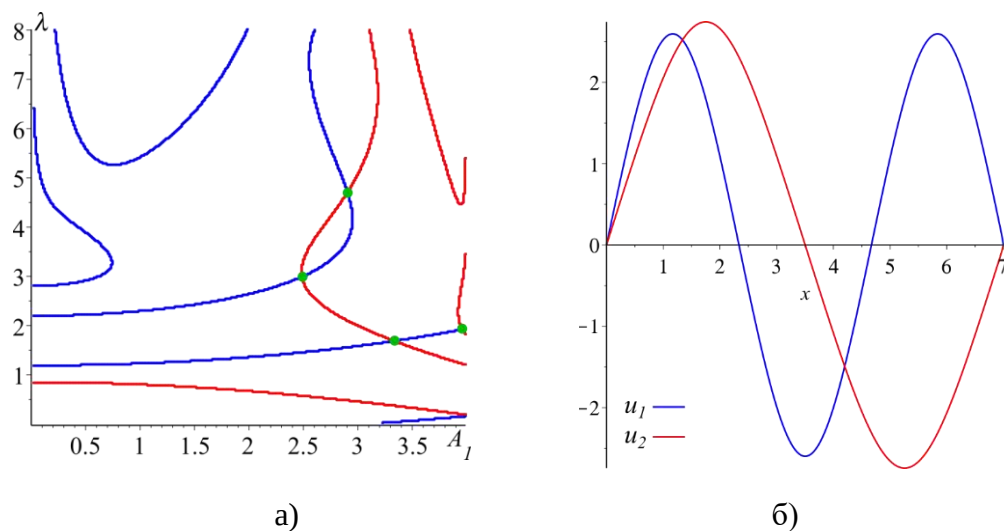


Рис. 1. а) Дисперсионные кривые и решения задачи;
б) собственные функции для одного из решений

Проделав аналогичные шаги для второго уравнения системы (8), получаем множество решений уравнения $\Delta_2(\lambda, A_2) = 0$, представленное в виде красной кривой на рисунке 1. Упомянутые кривые называются дисперсионными кривыми.

На следующем шаге находим точки пересечения кривых (зеленые круги на рисунке 1). Эти точки являются приближенными решениями поставленной задачи. При расчете кривых на рисунке 1 использовались следующие параметры: $h = 7$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.09$, $\alpha_3 = 0.0005$, $\alpha_4 = 0.0006$. Для расчета собственных функций взята точка $\lambda \approx 1.69$, $A_1 \approx 3.33$.

Заключение

В приведенной работе выполнена постановка задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ волн в плоском нелинейном волноводе заполненном метаматериалом. Для решения этой задачи приведен численный метод. Получены численные результаты для определенного набора параметров задачи и построены собственные функции для одного из характеристических чисел.

Список литературы

1. Eleonskii P. N., Oganess'yants L. G., Silin V. P. Cylindric Nonlinear Waveguides // Soviet Physics JETP. 1972. Vol. 35, № 1. P. 44–47.
2. Boardman A. D., Egan P., Lederer F. [et al.]. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves // Elsevier sci. Publ. North-Holland, Amsterdam, London, New-York, Tokyo, 1991 // Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena / Eds. H.-E. Ponath and G. I. Stegeman.
3. Мартынова В. Ю. Распространение гибридных ТЕ-ТЕ-волн в плоском закрытом волноводе, заполненном нелинейной средой // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. Т. 60, № 4. С. 27–45.
4. Smirnov Yu. G., Smolkin E. Yu. On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium // Wave Motion. 2018. Vol. 77. P. 77–90.
5. Smirnov Yu. G., Smolkin E. Yu., Kurseeva V. Yu. The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguides // Applicable Analysis. 2019. Vol. 98, № 3. P. 483–498.
6. Pontryagin L. S. Ordinary Differential Equations // Pergamon Press, Addison-Wesley, Reading, MA ; Palo Alto, CA ; London, 1962.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Наталья Юрьевна Кудряшова¹,
Лилия Александровна Купряшина²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Аннотация. Рассматривается практическая реализация численных методов решения задачи аналитического продолжения на плоскости, в частности метод сингулярных интегральных уравнений, сеточный метод, и в пространстве.

Ключевые слова: численные методы, аналитическое продолжение функции, сеточный метод, сингулярные интегральные уравнения

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF APPROXIMATE METHODS FOR SOLVING THE PROBLEM OF ANALYTICAL CONTINUATION ON THE PLANE AND IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Natalya Yu. Kudryashova¹, Lilia A. Kupriashina²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Abstract. The article discusses the practical implementation of numerical methods for solving the problem of analytical continuation on the plane, in particular the method of singular integral equations, the grid method, and in space.

Keywords: numerical methods, analytical continuation of a function, grid method, singular integral equations

Ранее были изложены численные методы решения задачи аналитического продолжения на плоскости [1, 2], такие как метод сингулярных интегральных уравнений и сеточный метод, и в трехмерном пространстве [3]. Представляется интересным практическая реализация полученных вычислительных схем.

Рассмотрим решение задачи аналитического продолжения на плоскости. Пусть на комплексной плоскости дана область G , ограни-

ченная замкнутой кривой L . Пусть $G \subset G^*$. Пусть в области G^* задана аналитическая функция $x(z)$, значения которой известны только в области G . требуется распространить $x(z)$ из области G на G^* . Для простоты в качестве контура L рассматривается единичная окружность на комплексной плоскости γ_0 . Сначала будем искать приближенные значения функции $x(z)$ на единичной окружности. Для этого нужно решить следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = x(t), \quad t \in \gamma_0. \quad (1)$$

Это уравнение представляет собой формулу Коши. Сделаем в (1) замену переменных $\tau = (1+h)e^{i\sigma}$, $d\tau = (1+h)e^{i\sigma} i d\sigma$, $t = e^{is}$.

В результате имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x((1+h)e^{i\sigma})(1+h)e^{i\sigma}}{(1+h)e^{i\sigma} - e^{is}} d\sigma = x(e^{is}). \quad (2)$$

Уравнение (2) было решено методом коллокации. В результате была получена следующая вычислительная схема [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} + \frac{2k_1}{2n+1} \frac{x(t_k^1)(1+h)e^{is_k}}{(1+h)e^{is_k} - e^{is_k}} + \\ & + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} = x(t_k), \quad k = 0, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (3)$$

Найдем действительную и мнимую части вычислительной схемы. Пусть

$$x(t_k) = x_1^k + ix_2^k, \quad e^{is_k} = \cos s_k + i \sin s_k.$$

Тогда система (3) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} \frac{(x_1^j + ix_2^j)(1+h)(\cos s_j + i \sin s_j)}{(1+h)(\cos s_j + i \sin s_j) - (\cos s_k + i \sin s_k)} + \\ & + \frac{2k_1}{2n+1} \frac{(x_1^k + ix_2^k)(1+h)(\cos s_k + i \sin s_k)}{(1+h)(\cos s_k + i \sin s_k) - (\cos s_k + i \sin s_k)} + \\ & + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} \frac{(x_1^j + ix_2^j)(1+h)(\cos s_j + i \sin s_j)}{(1+h)(\cos s_j + i \sin s_j) - (\cos s_k + i \sin s_k)} = \\ & = x_1^k + ix_2^k, \quad k = 0, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате преобразований в (4) система (3) примет вид (5)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} x_1^j \left(\frac{(h+1)^2 - (h+1)\cos(s_j - s_k)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) + \\
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} x_2^j \left(\frac{(h+1)\sin(s_k - s_j)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) + \\
& + \frac{2k_1}{2n+1} x_1^k \frac{h+1}{h} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} x_1^j \left(\frac{(h+1)^2 - (h+1)\cos(s_j - s_k)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) + \\
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} x_2^j \left(\frac{(h+1)\sin(s_k - s_j)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) = x_1^k, \\
& k = 0, \dots, 2n, \\
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} x_1^j \left(\frac{(h+1)\sin(s_k - s_j)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) + \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} x_2^j \left(\frac{(h+1)^2 - (h+1)\cos(s_j - s_k)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) + \\
& + \frac{2k_1}{2n+1} x_2^k \frac{h+1}{h} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} x_1^j \left(\frac{(h+1)\sin(s_k - s_j)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) + \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} x_2^j \left(\frac{(h+1)^2 - (h+1)\cos(s_j - s_k)}{(h+1)^2 - 2(h+1)\cos(s_j - s_k) + 1} \right) = x_2^k, \quad k = 0, \dots, 2n. \quad (5)
\end{aligned}$$

Рассмотрим аналитическое продолжение функции

$$x(z) = \frac{1}{z-14}, \quad (6)$$

которая имеет особую точку $z_0 = 14$. Здесь $z = z_1 + iz_2$.

Действительная и мнимая части функции (6) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} x(z) &= \frac{z_1 - 14}{(z_1 - 14)^2 + z_2^2}, \\
\operatorname{Im} x(z) &= \frac{-z_2}{(z_1 - 14)^2 + z_2^2}.
\end{aligned}$$

Будем предполагать, что значения $x(z)$ известны только внутри единичной окружности на комплексной плоскости с центром в начале координат и на самой этой окружности. Эту функцию можно продолжить с единичного круга на область, отстоящую от особой точки на 0.4.

Результаты аналитического продолжения функции (6) по схеме (5) приведены в таблице 1. Зависимость максимальной погрешности от количества разбиений представлена в табл. 2.

Таблица 1

Аналитическое продолжение функции (4) при $n = 60$

Точка	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
x_1				
0,207709	-0,075120	-0,0076777	0,001657	0,02 %
0,675053	-0,074946	-0,075478	0,000532	0,007 %
1,19432	-0,073223	-0,073015	0,000208	0,003 %
x_2				
0,311563	-0,001758	-0,001800	0,000041	0,02 %
0,778907	-0,012983	-0,003967	0,009016	0,69 %
1,40203	-0,014938	-0,005126	0,009812	0,66 %

Таблица 2

Зависимость максимальной погрешности от количества разбиений

Число узлов	Максимальная погрешность
20	0,037563
50	0,010297
100	0,004668
200	0,000921
400	0,000357

Полученная в [2] вычислительная схема для сеточного метода описывается следующими формулами:

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} \quad (7)$$

$$v_m^{n+1} = 2v_m^n - v_m^{n-1}. \quad (8)$$

$$u_m^{n-1} = 2u_m^n - u_m^{n+1}, v_m^{n-1} = 2v_m^n - v_m^{n+1}. \quad (9)$$

$$u_{m+1}^n = 2u_m^n - u_{m-1}^n, v_{m+1}^n = 2v_m^n - v_{m-1}^n. \quad (10)$$

$$u_{m-1}^n = 2u_m^n - u_{m+1}^n, v_{m-1}^n = 2v_m^n - v_{m+1}^n. \quad (11)$$

Рассмотрим практическую реализацию данной схемы.

Пусть на комплексной плоскости дана область $G \subset G^*$, ограниченная замкнутым контуром L , и пусть в области G^* задана аналитическая функция $x(z) = u(t, \tau) + iv(t, \tau)$. Для простоты обозначений возьмем в качестве области G прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

В качестве функции $x(z)$ возьмем функцию

$$x(z) = \frac{1}{z - 14}, \quad (12)$$

которая имеет особую точку $z_0 = 14$.

Будем предполагать, что значения $x(z)$ известны только внутри прямоугольника. Требуется найти приближенное значение функции $x(z)$ во всей области G^* .

Действительная и мнимая части функции (12) имеют вид:

$$\operatorname{Re} x(z) = \frac{z_1 - 14}{(z_1 - 14)^2 + z_2^2}, \quad \operatorname{Im} x(z) = \frac{-z_2}{(z_1 - 14)^2 + z_2^2}.$$

Результаты аналитического продолжения функции (12) по схеме (7)–(11) в узлах сетки первого и второго слоя, лежащих над областью G , приведены в табл. 3.

Таблица 3

Приближенные значения $x(z)$ в узлах сетки, лежащих над прямоугольником G

Численное значение	Аналитическое значение	Погрешность
1	2	3
<i>u</i> на первом слое		
–0,197456	–0,195008	0,002448
–0,214128	–0,211009	0,003119
–0,233815	–0,229759	0,004056
–0,257390	–0,251989	0,005401
–0,286087	–0,278689	0,007399
<i>u</i> на втором слое		
–0,196184	–0,189107	0,007077
–0,212497	–0,203540	0,008957
–0,231675	–0,220126	0,011549
–0,254506	–0,239295	0,015211
–0,282072	–0,261538	0,020533
<i>v</i> на первом слое		
–0,031797	–0,031201	0,000595
–0,037523	–0,036697	0,000826
–0,044944	–0,043764	0,001180
–0,054795	–0,053050	0,001744
–0,068259	–0,065574	0,002686

1	2	3
v на втором слое		
-0,047695	-0,045386	0,002309
-0,056285	-0,053097	0,003188
-0,067416	-0,062893	0,004523
-0,082192	-0,075567	0,006625
-0,102389	-0,092308	0,010081

Наконец, найдем продолжение гармонической функции в трехмерном пространстве. Пусть дана какая-то замкнутая поверхность S , и пусть в области $D \subset D^*$, ограниченной поверхностью S задана гармоническая функция $\vec{\phi} = \vec{i}\phi_1(x, y, z) + \vec{j}\phi_2(x, y, z) + \vec{k}\phi_3(x, y, z)$, причем существует такая вещественная потенциальная функция $U (\Delta U = 0)$, что $\text{grad } U = \vec{\phi}$. Требуется найти приближенные значения функции $\vec{\phi}$ во всей области D^* . Будем считать, что функции $\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z), \phi_3(x, y, z) \in H_{\alpha, \alpha, \alpha}$.

Выберем в области D^* замкнутую поверхность S_1 , ограничивающую область D_1 , такую что $D \subset D_1$. Известно, что если функция $\vec{\phi}(r)$ аналитическая в области D_1 , то ее значения внутри этой области определяются формулой

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[(n \bullet \phi(r)) \text{grad} \frac{1}{|r - r_1|} + [n \times \phi(r)] \times \text{grad} \frac{1}{|r - r_1|} \right] ds = \begin{cases} \phi(r_1), & r_1 \in D_1; \\ 0, & r_1 \in \subset D_1. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $r = (x, y, z) \in S_1$, $r_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$, n – вектор нормали к поверхности S_1 .

Применим вычислительную схему для аналитического продолжения функции

$$\vec{\phi} = \vec{i}\phi_1(x, y, z) + \vec{j}\phi_2(x, y, z) + \vec{k}\phi_3(x, y, z),$$

где

$$\phi_1 = -100 \frac{x - x_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}},$$

$$\phi_2 = -100 \frac{y - y_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}},$$

$$\phi_3 = -100 \frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}, \quad (14)$$

где $x_0 = 5,4$, $y_0 = -3,5$, $z_0 = 7,65$.

Для решения поставленной задачи будем использовать метод коллокации. Будем для простоты рассматривать в качестве поверхности S сферу с центром в начале координат радиуса R (обозначим ее $S(0, R)$), а в качестве области D соответственно ограничиваемый этой сферой шар. Предположим, что нам известны точные значения функции $\vec{\phi}(x, y, z)$ на сфере S , и что функция $\vec{\phi}$ является гармонической в шаре с радиусом $R + h$. Тогда решая уравнение (13), где неизвестными являются значения функции $\vec{\phi}$ на сфере S_1 с центром в начале координат с радиусом $R + h$, определяем аналитическое продолжение со сферы S на сферу S_1 .

Тогда по схеме, полученной в [3]:

$$x^{m+1} = \alpha_m x^m + (1 - \alpha_m) x^m - \gamma(\beta x^m + A^* A x^m - A^* b). \quad (15)$$

Перейдем в (13) к сферическим координатам.

$$\begin{aligned} x &= (R + h) \cos t, \\ y &= (R + h) \sin t \cos \theta, \\ z &= (R + h) \sin t \sin \theta, \\ 0 &\leq t \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Тогда ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 примут вид

$$\phi_1 = -100 \frac{R \cos t - 5,4}{[(R \cos t - 5,4)^2 + (R \sin t \cos \theta + 3,5)^2 + (R \sin t \sin \theta - 7,65)^2]^{3/2}},$$

$$\phi_2 = -100 \frac{R \cos t + 3,5}{[(R \cos t - 5,4)^2 + (R \sin t \cos \theta + 3,5)^2 + (R \sin t \sin \theta - 7,65)^2]^{3/2}},$$

$$\phi_3 = -100 \frac{R \cos t - 7,65}{[(R \cos t - 5,4)^2 + (R \sin t \cos \theta + 3,5)^2 + (R \sin t \sin \theta - 7,65)^2]^{3/2}},$$

Результаты продолжения функции ϕ при $n = 10$ приведены в таблице 4. Таким образом, указанный метод позволяет распространить с достаточной точностью функцию на область, объем которой в несколько раз превышает объем исходной области [4, 5].

Аналитическое продолжение гармонической функции (14) при $n=10$

Численное значение	Аналитическое значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$0,5398i - 0,3587j + 0,7763k$	$0,5398i - 0,3595j + 0,7775k$	0,00142	0,28 %
$0,5421i - 0,3586j + 0,7785k$	$0,5423i - 0,3595j + 0,7799k$	0,00161	0,3 %
$0,5432i - 0,3574j + 0,7801k$	$0,5435i - 0,3581j + 0,7816k$	0,00171	0,3 %
$0,5427i - 0,3555j + 0,7805k$	$0,5430i - 0,3560j + 0,7820k$	0,00166	0,25 %

Таким образом, предложенные алгоритмы обеспечивают достаточно точное решение задачи аналитического продолжения. Точность решения увеличивается при увеличении числа узлов коллокации. Проведенные практические исследования показали, что использование метода Гаусса дает достаточно точные, но неустойчивые решения. Поэтому возникает необходимость в итерационной регуляризации представленных алгоритмов. Итерационная регуляризация представлена формулой (15).

Список литературы

1. Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. Об одном численном методе решения задачи аналитического продолжения на плоскости // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 140–144.
2. Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. Сеточный метод решения задачи аналитического продолжения на плоскости // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (г. Пенза, Россия, 1–4 июня 2023 г.) : в 2 ч. / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. С. 95–101.
3. Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. Численные методы решения задачи аналитического продолжения гармонических функций в трехмерном пространстве // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVIII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. с конкурсом науч.-исслед. работ для обучающихся, посвящ. 80-летию ПГУ и 80-летию кафедры ВиПМ (г. Пенза,

Россия, 6–10 ноября 2023 г.) : в 2 ч. / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. Ч. 1. С. 141–147.

4. Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // Журнал Средне-волжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577.

5. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Михаил Сергеевич Нефедов¹,
Руслан Викторович Жалнин²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹snef7@yandex.ru, ²zhhrv@mrsu.ru

Аннотация. Рассматривается решение двумерного уравнения теплопроводности многосеточным методом. Многосеточный метод позволяет значительно ускорить решение уравнения теплопроводности за счет эффективного использования информации о различных масштабах изменения температуры в пространстве и уменьшения количества вычислений на более мелких уровнях сетки. Он широко применяется в численном моделировании теплопроводности для различных прикладных задач.

Ключевые слова: уравнения параболического типа, уравнение теплопроводности, многосеточный метод на основе W-цикла

APPLICATION OF THE MULTIGRID METHOD TO SOLVE THE TWO-DIMENSIONAL EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY

Mikhail S. Nefedov¹, Ruslan V. Zhalnin²

^{1,2}National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹snef7@yandex.ru, ²zhhrv@mrsu.ru

Abstract. The solution of the two-dimensional heat equation by the multigrid method is considered. The multigrid method makes it possible to significantly accelerate the solution of the thermal conductivity equation by effectively using information about various scales of temperature change in space and reducing the number of calculations at smaller grid levels. It is widely used in numerical simulation of thermal conductivity for various applications.

Keywords: Parabolic type equations, thermal conductivity equation, a multigrid method based on the W-cycle

Введение

На данный момент, многосеточный метод является одним из наиболее эффективных способов решения СЛАУ. Впервые этот метод был предложен Р. П. Федоренко.

Многосеточный метод не представляет собой определенный конкретный метод, в привычном понимании этого понятия. Multigrid method – это некий шаблон; конструкция из нескольких связанных между собой этапов; эффективность которого зависит от нескольких факторов, одним из самых главных является адаптация под определенную задачу [1].

За последние несколько лет он очень сильно прогрессировал. Применение многосеточного метода может быть особенно полезным при решении задач с большими различиями в масштабах решения или при наличии сложной геометрии области. Например, при моделировании турбулентных потоков в сложных геометриях или при распространении тепла в неоднородных средах.

Многосеточный метод позволяет эффективно решать задачи с разными уровнями дискретизации, так как он обеспечивает точность решения на грубой сетке с существенно меньшими вычислительными затратами. При этом он автоматически корректирует решение на более мелкой сетке, чтобы учесть дополнительные детали процесса.

Таким образом, использование многосеточного метода при численном решении уравнений физики позволяет сэкономить время и ресурсы на вычислениях, улучшить точность решения и повысить эффективность моделирования сложных процессов.

В данной работе представлено решение двумерного уравнения теплопроводности с использованием многосеточного метода, в основу которого был положен W-цикл [2].

1. Структура многосеточного метода для решения двумерного уравнения теплопроводности

Рассматривается начально-краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности [3]:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где

$$(x, y, t) \in J,$$

$$J = \{0 < x < l_2, 0 < y < l_2, 0 < t \leq T\},$$

u – температура; ρ – плотность; k – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ и краевые и начальные условия:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y),$$

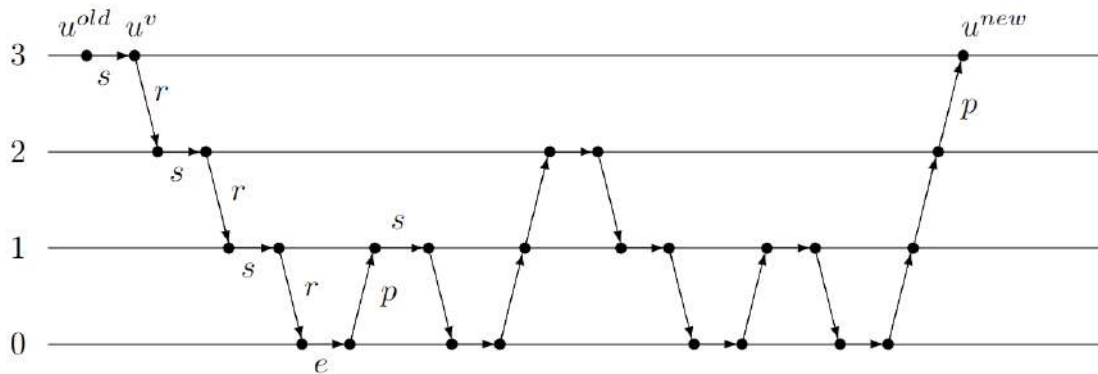
$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t).$$

Рассматривается область J с сеткой равномерно распределенной по времени и пространству. Чтобы аппроксимировать уравнение (1) в данной статье используется следующая неявная схема [4]:

$$\begin{aligned} & (\rho C)_{ij} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} \\ &= k_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_x^2} - k_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \\ &+ k_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_y^2} - k_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + \Phi_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

В разностной схеме: $u_{i,j}^{n+1}$, $u_{i,j}^n$ – решения на $(n+1)$ и (n) временных слоях; h_x , h_y – шаги сетки по x и y , τ – шаг по t .

В качестве структуры решения многосеточным методом используется W -цикл.



s - smoothing (сглаживание), r - restriction (проекция),
 e - exact solution (точное решение), p - prolongation (продолжение)

Рис. 1. W -цикл

Из всех, представленных выше, этапов – *smoothing*, обычно, является самым важным в решении задачи. Данная операция делается для того, чтобы ошибка, которая была получена, хорошо приближалась на более грубой сетке.

Переход с сетки с шагом H на сетку с шагом h осуществляется на этапе *Prolongation*.

Переход с сетки с шагом h на сетку с шагом H осуществляется на этапе *Restriction*.

$$A_h u^{n+1} = f_h. \quad (3)$$

Алгоритм решения:

1) Этап *Smoothing*:

a) дана сетка с шагом $h = (h_x, h_y)$;

b) находится u_h^k ;

c) решается $u_h^k - m_h^k$, где m_h^k – погрешность (4);

d) m_h^k находится приближенно, $A_h u_h^k = r_h$, где $A_h u_h^k = f_h$.

2) Этап *Restriction*:

a) находится приближенное значение m_h^k ;

b) решается $A_H \Delta_H = r_h$, где A_H – аппроксимация A_h на сетку с шагом $H = 2h$, r_H – ограничение величины ошибки на эту сетку (5).

3) Этап *Prolongation*:

a) находится решение $u_h = u_h^k - m_h$ (6).

4) Этап *Post – smoothing*:

a) $A_{hk} \Delta_{hk} = r_{hk}$ (7).

1) Ищется решение уравнения (3), применив k итераций на сетке с шагом h . Методом Гаусса – Зейделя находится решение уравнения (4) при известном m_h^k .

2) Осуществляется переход на сетку с шагом $H = 2h$, из уравнения (5) находится приближенное значение m_h^k .

3) Рассматривается сетка с шагом h . На ней делается интерполяция Δ_H , находится значение m_h и получается решение уравнения (6).

4) На этапе *Post – smoothing* применяются пункты 1) – 3). Самый последний уровень сетки подразумевает повторное использование метода Гаусса – Зейделя до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

Для перехода с сетки с шагом H на сетку с шагом h используется 9-ти точечный шаблон для оператора проектирования r .

Процесс, представленный на рисунке 2, называется билинейной интерполяцией, особенность которого – использование значения в узлах сетки с более грубым шагом. Данный процесс позволяет получить приближенные значения в узлах сетки с более мелким шагом.

Узлы, принадлежащие более мелкой сетке с шагом h_k , уже известны и сохраняются изначально. Для узлов, которые принадлежат более грубой сетке с шагом h_{k-1} , используется билинейная интерполяция для нахождения значения.

В результате применения этого алгоритма мы можем вычислить значения в узлах сетки с мелким шагом h_k , используя значения в узлах сетки с более грубым шагом h_{k-1} [5].

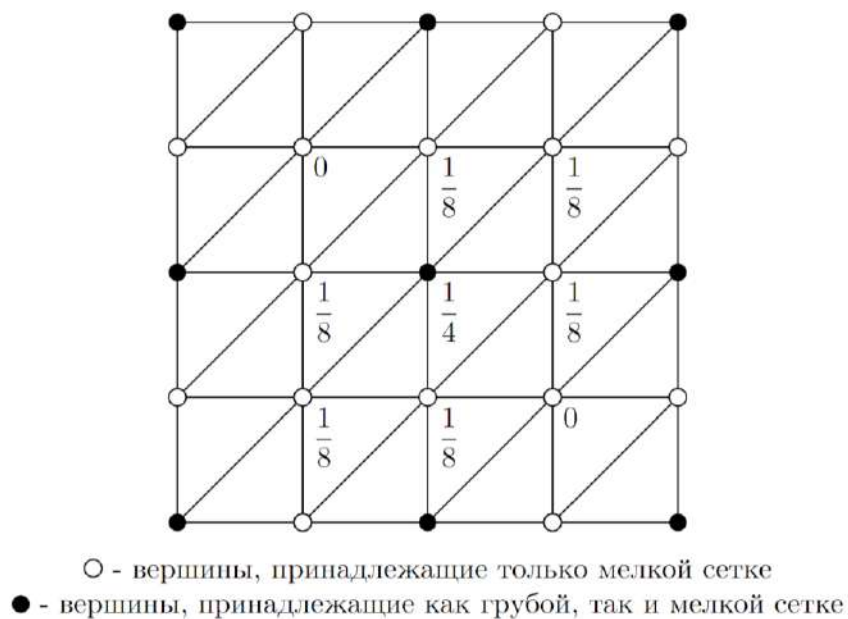


Рис. 2. Шаблон для оператора проектирования r с мелкой сетки на грубую

Таким образом, мы получаем набор значений в узлах сетки с мелким шагом, которые могут быть использованы для дальнейших вычислений.

2. Результаты расчетов при решении двумерного уравнения теплопроводности с помощью многосеточного метода

Данный многосеточный метод тестировался в области расчета единичный квадрат. Применялась одна сглаживающая итерация.

В многосеточном методе использовалось два уровня сеток (две итерации W-цикла).

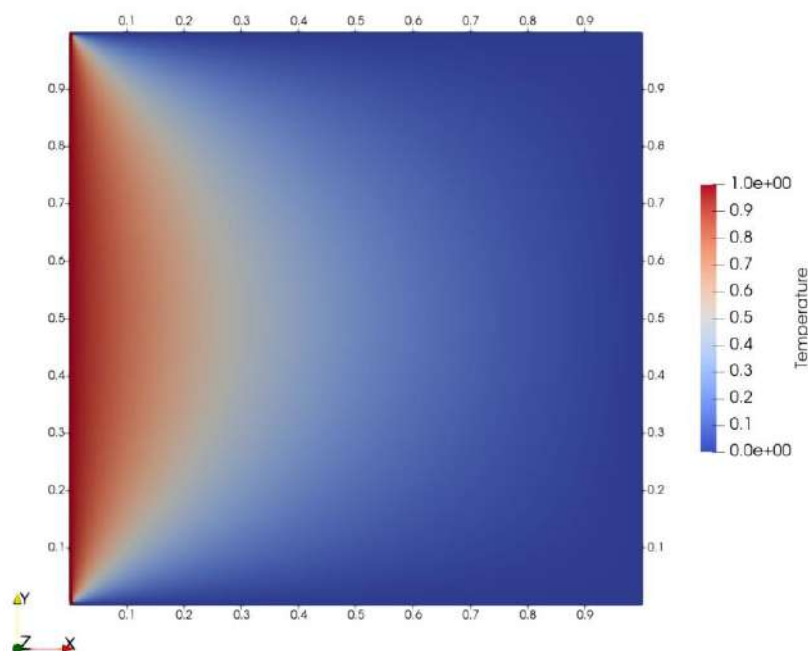


Рис. 3. Решение уравнения теплопроводности с помощью MGM

Таблица 1

**Порядки сходимости решения уравнения
теплопроводности**

Количество ячеек по оси x и y (N)			Порядок сходимости
10	20	40	1.9503
20	40	80	1.9551
40	80	160	1.9581
160	320	640	1.9598

Также, для сравнения, двумерное уравнение теплопроводности было вычислено с использованием явной и неявной схемы без использования многосеточного подхода.

В табл. 2 показано время выполнения программы на сетках разной размерности.

Таблица 2

Время выполнения программы на сетках разной размерности

Размерность сетки	Явная схема	Неявная схема без MG	Неявная схема с MG
50 x 50	2.88 s	17.28 s	10.23 s
100 x 100	7.7 s	4.09 m	2.63 m
150 x 150	16.46 s	35.46 m	22.28 m
300 x 300	63.2 s	4.02 h	2.4 h
1000 x 1000	10.8 m	56.03 h	26.15 h

В настоящей работе, предложенный метод обладает высокой точностью и эффективностью при решении двумерной задачи теплопроводности.

При его численном решении на сетках, представленных выше, быстро достигались высокие порядки сходимости – 1.95 и выше.

Список литературы

1. Hackbusch W. Multigrid Method and Application // Springer-Verlag. 1985. Vol. 17. 377 p.
2. Олышанский М. А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М. : Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2003. 176 с.
3. Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф. Численный метод решения уравнения теплопроводности на треугольных сетках на основе многосеточного метода. М. : Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2011. 16 с.
4. Милюкова О. Ю. Численный метод решения уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом на основе многосеточного метода. М. : Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2013. 19 с.
5. Попов В. В. Применение многосеточных методов в математическом моделировании : учеб. пособие. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2005.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, ДЕМОГРАФИИ, СОЦИАЛЬНЫХ НАУК

УДК 004.042

АРХИТЕКТУРА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ИЗ МЕССЕНДЖЕРА НА ПРИМЕРЕ TELEGRAM

Евгений Сергеевич Калабкин¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹e.kalabkin@gmail.com, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Представлена разработка архитектуры распределенной обработки данных из мессенджера на примере Telegram. Эта разработка отвечает потребностям эффективной выгрузки сообщений, улучшения доступности данных. Такая архитектура гарантирует эффективное управление задачами и их распределение между несколькими вычислительными узлами.

Ключевые слова: мессенджер, выгрузка, внешняя система, оптимизация хранения, доступность данных

ARCHITECTURE OF DISTRIBUTED DATA PROCESSING FROM MESSENGER USING THE EXAMPLE OF TELEGRAM ABSTRACT STATE MACHINE FOR UNLOADING MESSAGES

Evgeniy S. Kalabkin¹, Tatiana F. Mamedova²

^{1,2}National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹e.kalabkin@gmail.com, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. The development of an architecture for distributed processing of data from a messenger is presented using Telegram as an example. This development meets the needs of efficient message unloading and improved data availability. This architecture guarantees efficient task management and distribution across multiple computing nodes.

Keywords: messenger, unloading, external system, storage optimization, data availability

Введение

Telegram на 2024 год является одним из самых популярных мессенджеров на территории стран СНГ и его популярность продолжает

расти [1]. Соответственно, средний и мелкий бизнес уже предоставляет свои услуги на этой платформе, при этом интерфейс данного мессенджера не заточен под ведение аналитики и автоматическую обработку лидов, что заставляет пользователей прибегать к использованию готовых платных решений в виде CRM систем или помощи сторонних разработчиков по сбору данных для ведения аналитики.

Основная часть

Предлагаемая реализация системы состоит из четырех независимых частей: Load Balancer (Балансировщик нагрузки), Node Pool (Набор вычислительных узлов), RDBMS (Реляционная СУБД) и Application (Основное приложение, источник задач) (рис. 1).

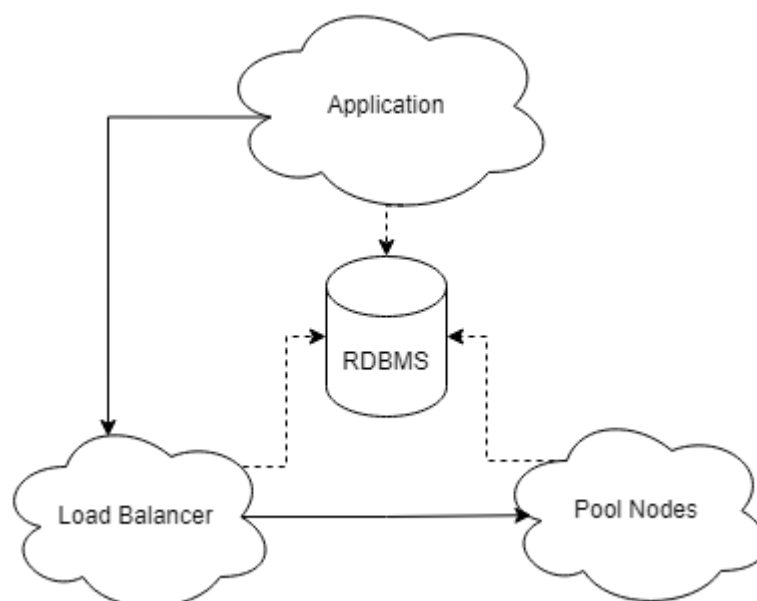


Рис. 1. Схема взаимодействия компонентов

Приложением может выступать любое web, мобильное или desktop приложение, которое должно предоставлять интерфейс для добавления задач на выгрузку сообщений, настройки интеграций с Telegram. Сфера применения такого приложения может быть практически любой, начиная с удобного места для сбора сообщений с разного числа аккаунтов и заканчивая CRM системой или встроенной аналитикой.

Рассмотрим основные составные части балансировщика нагрузки.

Очередь задач (или Task Queue) – это фундаментальный компонент архитектуры балансировщика нагрузки. Он отвечает за хранение набора задач и их передачу дальнейшему обработчику. Соответственно сами задачи могут быть расставлены в порядке приоритета. Сам приоритет может быть выставлен на основе различных факторов, таких как: критичность, потенциальная временная сложность задачи или SLA (Соглашение об уровне обслуживания).

Алгоритм распределения нагрузки (или Load Distribution Algorithm) – это основной компонент, который в ходе своего исполнения принимает решение о том, какой вычислительный узел получит задачу из Task Queue. Далее будет произведен разбор основных видов LDA.

Основными кандидатами для рассматриваемого рода задач можно выделить: Weighted Least Connection, Weighted Round-Robin. Их отличительной чертой является предварительное указание приоритета для исполнения задачи [2].

Составные части балансировщика нагрузки представлены на рис. 2.

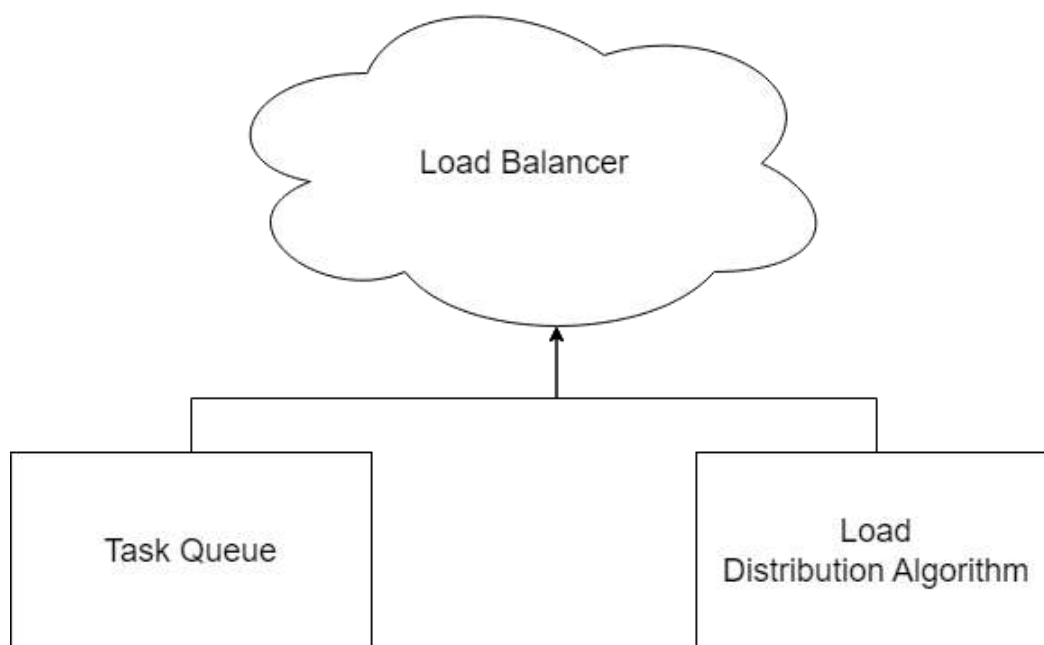


Рис. 2. Составные части балансировщика нагрузки

На рис. 3 представлена общая схема взаимодействия балансировщика. В простейших случаях в качестве Task Queue может выступать отдельная БД. В нетривиальных случаях это может быть отдельный микросервис со своей логикой.

Так как алгоритм направлен на выгрузку сообщений из мессенджера, то их задачи можно поделить в общем смысле на два вида:

1. Разделение задачи выгрузки на подзадачи путем разбиения по диалогам.
2. Исполнение подзадачи определенного набора диалогов.

Соответственно, при проектировании, в простейшем случае, будет достаточно указывать высший приоритет задачам первого типа. Получается, что каждый вычислительный узел должен иметь возможность самому отправлять набор задач в Task Queue для их распределения балансировщиком.

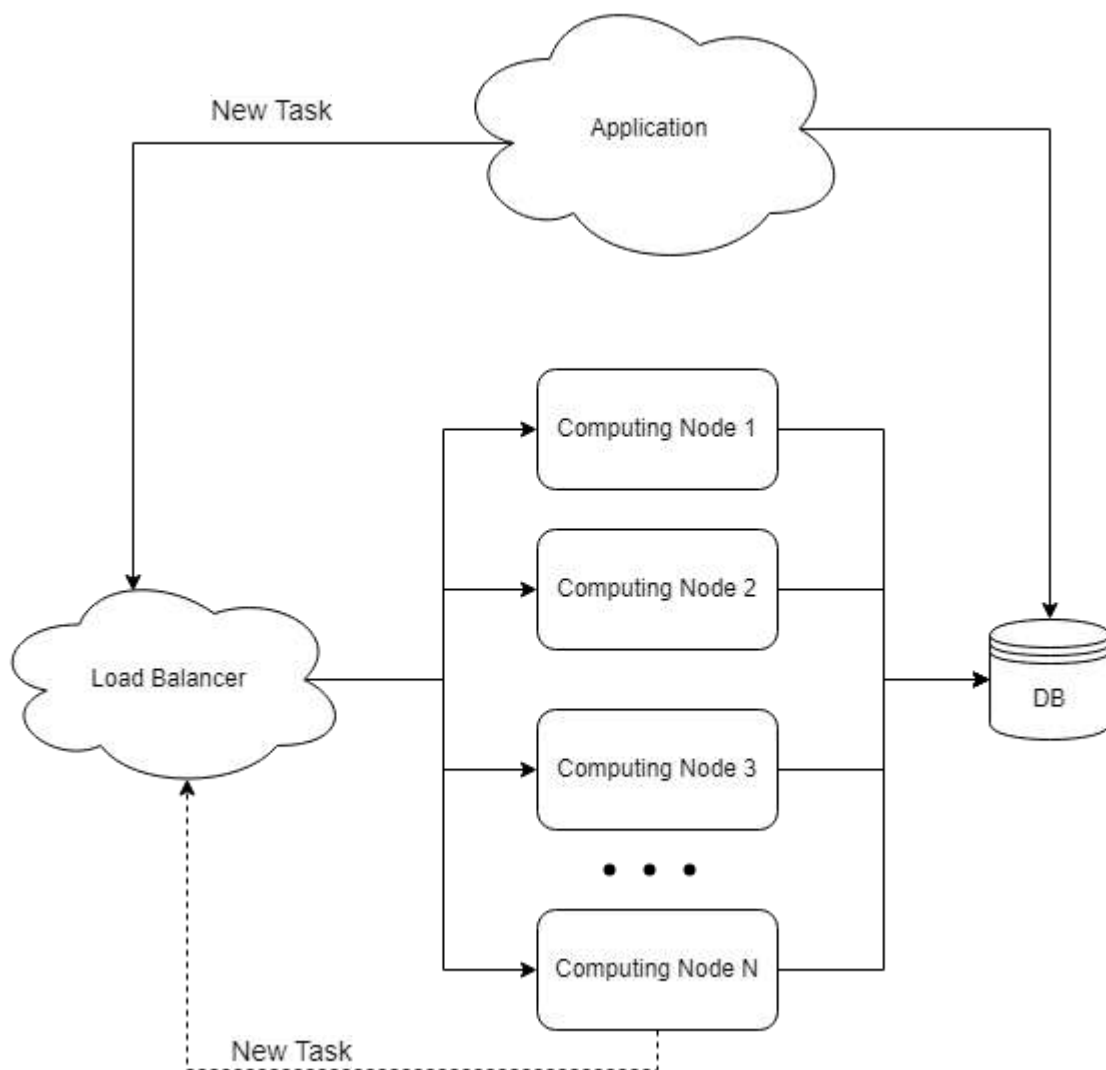


Рис. 3. Общий вид взаимодействия балансировщика нагрузки с вычислительными узлами

Заключение

При использовании балансировщика мы получили возможность масштабируемости системы, что позволяет подключать большое число пользователей. Его архитектура, включающая основные компоненты, такие как Task Queue и LDA, гарантирует эффективное управление задачами и их распределение между несколькими вычислительными узлами.

Список литературы

1. Доля пользователей Telegram достигла почти половины населения России. Как платформа Павла Дурова конкурирует с YouTube и WhatsApp. URL: https://www.rbc.ru/technology_and_media/06/02/2024/65c0bc179a7947176b534458 (дата обращения: 02.04.2024).

2. Калабкин Е. С., Мамедова Т. Ф. Параллельная обработка сообщений из мессенджера с помощью балансировщика нагрузки // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (АЧМ-2023) : сб. ст. по материалам XVIII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. с конкурсом науч.-исслед. работ для обучающихся, посвящ. 80-летию Пенз. гос. ун-та и 80-летию кафедры ВиПМ : в 2 ч. Пенза : Изд-во ПГУ, 2023.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАНА ЛЕСОНАСАЖДЕНИЙ ГОРОДСКОЙ ТЕРРИТОРИИ

Анна Андреевна Шалаева

Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

Liyaskinaa@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача автоматизации процесса расчета процента озеленения городской территории на примере Республики Мордовия. Для поиска фигуры насаждения использовали встроенный алгоритм программы Godot Engine, а также подсчет площади с помощью формулы площади Гаусса, которую иногда называют формулой землемера или шну-рования. Применение предлагаемой методики позволит в последующем использовать автоматизацию в реализации программных комплексов, тем самым значительно сократить время и трудозатраты для нахождения показателей озеленения выбранной городской среды.

Ключевые слова: автоматизация моделирования, площадь, процент озеле-нения

CREATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF DEVELOPMENT OF FOREST PLANTATIONS

Anna A. Shalaeva

National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Liyaskinaa@mail.ru

Abstract. This paper examines the task of automating the process of calculating the percentage of greening in an urban area using the example of the Republic of Mordovia. To find the figure of the planting, we used the built-in algorithm of the Godot Engine program, and calculated the area using the Gaussian area formula, which is sometimes called the surveyor or lacing formula. The application of the proposed methodology will allow the subsequent use of software systems in the implementation, thereby significantly reducing the time and labor costs for finding indicators of greening of the selected urban environment.

Keywords: automation modeling, area, percentage of greenery

В условиях быстрого технологического развития и повышенного внимания к вопросам экологии, управление лесными насаждениями и формирование плана по учету и возрождению становится неотъемле-

мыми компонентами стратегии устойчивого лесного хозяйства. В современном контексте, когда экологические вопросы становятся все более актуальными, особенно в контексте городского хозяйства и его влияния на эффективное управление лесами играет ключевую роль в сохранении природных ресурсов.

В настоящее время современные технологии, такие как дистанционное зондирование, спутниковые данные и сенсоры, играют ключевую роль в сборе информации о лесонасаждениях. Это позволяет создавать более точные карты и оптимизировать процессы учета деревьев.

Таким образом, эволюция формирования плана лесонасаждений и учета деревьев в лесном хозяйстве отражает переход от ручных методов к использованию современных технологий. Внедрение геоинформационных систем и других механизированных средств улучшило точность и эффективность процессов учета деревьев, способствуя более эффективному планированию и управлению лесами.

В современном лесном хозяйстве, автоматизация и эффективное управление данными о насаждениях и учете деревьев стали ключевыми аспектами обеспечения устойчивого управления лесными ресурсами [1, 2].

Помочь в решении вопроса автоматизации может программно-информационная система, которая позволит автоматизировать учет, контроль и качественное формирование лесонасаждений. Тем самым превращая рутинные задачи в автоматизированный процесс, с целью минимизации ошибок из-за человеческого фактора сотрудников лесного хозяйства, также позволит создавать более эффективные и устойчивые лесохозяйственные стратегии, с учетом требований к совместимости видов деревьев [3].

Важным аспектом успешного формирования лесных насаждений, в частности, в городской местности является анализ совместимости различных видов деревьев и расчет процента озеленения на выбранной территории.

Согласно нормативам, установленным в документе «СНиП 2.07.01-89* Градостроительство. Планировка и застройка городских и сельских поселений» на 11 странице, минимальный процент озеленения города (уровень озелененности территории застройки) составляет 40 %. Этот показатель представляет собой важный критерий для обеспечения здоровья и благополучия городских жителей. Озеленение города играет ключевую роль в создании здоровой и устойчивой городской среды. Важность этого процента заключается не только в эстетическом аспекте, но и в функциональных преимуществах, которые озеленение приносит городу.

Рассмотрим алгоритм, по которому высчитывается это процент.

Фигуру насаждения, для последующего подсчета площади, мы считаем через встроенный в Godot алгоритм Convex Hull – нахождение выпуклого многоугольника-«оболочки» по заданным точкам.

Существуют разные алгоритмы, в движке представлен свой специфично оптимизированный алгоритм, считающий сначала нижнюю, а потом верхнюю часть оболочки, с помощью нахождения векторного произведения, знак которого определяет, с какой стороны находится одна точка относительно другой:

```
static Vector<Point2> convex_hull(Vector<Point2> P) { int n =
P.size(), k = 0;
    Vector<Point2> H; H.resize(2 * n);

    // Sort points lexicographically. P.sort();

    // Build lower hull.
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        while (k >= 2 && vec2_cross(H[k - 2], H[k - 1], P[i]) <= 0) { k--; }
        H.write[k++] = P[i];
    }

    // Build upper hull.
    for (int i = n - 2, t = k + 1; i >= 0; i--) {
        while (k >= t && vec2_cross(H[k - 2], H[k - 1], P[i]) <= 0) { k--; }
        H.write[k++] = P[i];
    }

    H.resize(k); return H;
}
```

Получив желаемый многоугольник, остается посчитать его площадь. Это легко сделать с помощью формулы площади Гаусса, которую иногда называют формулой землемера или шнурования (рис. 1).

Она представляет собой сумму определителей:

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{pmatrix} \right|,$$

или:

$$\frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_{n-1} y_n + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_1 - \dots - x_n y_{n-1} - x_1 y_n|$$

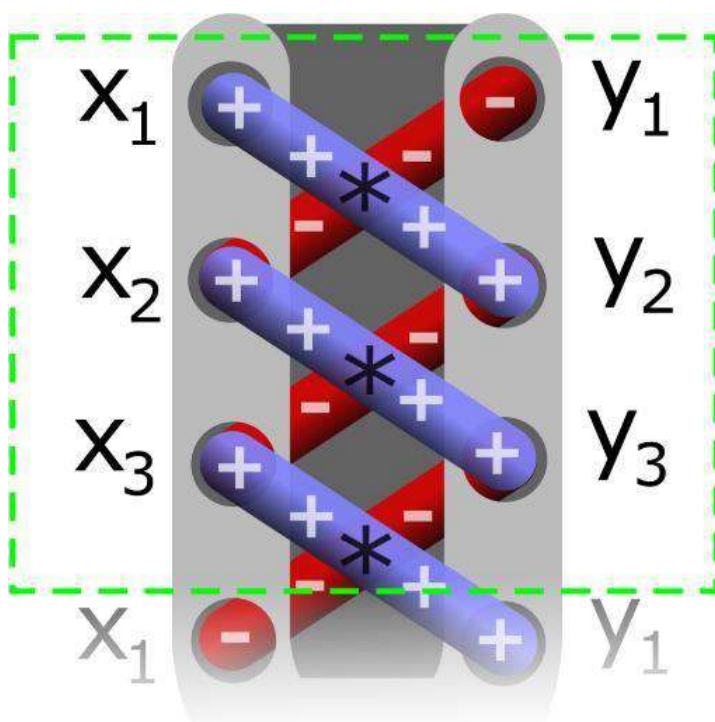


Рис. 1. Визуальное представление алгоритма шнурования

В выбранной выше системе этот алгоритм может быть представлен следующим кодом:

```
func get_area(points:Array[Vector2]):
var area = 0.
var q = points[-1]
for p in points:
area += p[0] * q[1] - p[1] * q[0]
q = p
return abs(area / 2)
```

Гибкость и простота административных функций гарантируют, что система будет способной адаптироваться к изменениям в требованиях и поддерживать актуальность на протяжении длительного времени.

Таким образом, разработанная ПИС представляет собой не только решение для формирования насаждений, но и инструмент для учета деревьев в лесном хозяйстве, что способствует улучшению экологических и экономических показателей в данной области.

В заключении следует подчеркнуть, что разработанный алгоритм расчет процента озеленения станет важной составляющей в разработке программно- информационных систем, которая будет представлять собой эффективный инструмент не только для управления лесонасаждениями в городской среде, но и учета деревьев.

Список литературы

1. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Исследование математических моделей взаимодействия многовидовых сообществ // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14, № 4. С. 62–69.
2. Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов : учеб. пособие. М. : Изд-во МГУ, 1993. 302 с.
3. Чумаченко С. И. Моделирование динамики многовидовых разновозрастных лесных ценозов // Журнал общей биологии. 1999. Т. 59, № 4. С. 371–377.

АЛГОРИТМЫ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО

Татьяна Фанадовна Мамедова¹,
Мария Владимировна Козлова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹mamedovatf@yandex.ru, ²markoo20@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача автоматизации прогнозирования ценообразования опционов на основе метода Монте-Карло. Создано программное обеспечение, реализующее автоматизацию алгоритмов европейского и азиатского опционов. Автоматизация прогнозирования выполнена в виде программного обеспечения на языке программирования Python.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, моделирование цен, европейский опцион, азиатский опцион, стоимость опциона

OPTION PRICING ALGORITHMS BASED ON THE MONTE CARLO METHOD

Tatiana F. Mamedova¹, Maria S. Kozlova²

^{1,2}National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹mamedovatf@yandex.ru, ²markoo20@yandex.ru

Abstract. The problem of automating option pricing forecasting based on the Monte Carlo method is considered. Software has been created that implements the automation of the European and Asian options algorithm. Automation of forecasting is implemented in the form of software in the Python programming language

Keywords: Monte Carlo method, price modeling, European option, Asian option, option cost

Основными преимуществами использования математического моделирования в экономике являются исследование, анализ и прогнозирование процессов без учета воздействия на реальную экономическую ситуацию, что позволяет оценивать закономерности и влияние различных факторов, создавать прогнозы, а также принимать итоговые обоснованные решения на основе полученных данных.

Алгоритмы по расчету стоимости азиатского и европейского типов опционов, основанных на методе Монте-Карло, будем рассмат-

ривать исходя из стохастического дифференциального уравнения динамики стоимости базового актива [1].

Введем переменные, используемые при описании алгоритмов для ценообразования опционов:

- S_0 – цена актива в начальный момент времени;
- $S(t_i)$ – цена актива в момент времени t_i (на предыдущем шаге);
- Δt – разница времени между двумя точками;

Значение ε является случайным числом и отражением стохастических свойств рынка.

Европейский опцион. Сформулируем алгоритм для расчета стоимости европейских опционов на основе метода Монте-Карло. Он состоит из следующих шагов:

- расчет стоимости базового актива для каждого смоделированного n -ого числа ε по формуле, которая удовлетворяет:

$$S(t) = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\varepsilon}$$

- вычисление среднего значения цен базового актива $S_{\text{ср}}$;

$$S = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S(t_i);$$

- расчет стоимости опциона, используя для типа колл формулу и для типа пут формулу:

$$C = e^{-rT} \max(S(t) - K, 0),$$

$$P = e^{-rT} \max(K - S(t), 0).$$

Азиатский опцион. Азиатские опционы характеризуются более сложным алгоритмом, так как необходимо учитывать полный путь изменения цены базового актива до даты экспирации. Сформулируем алгоритм для расчета стоимости азиатских опционов на основе метода Монте-Карло. Он состоит из следующих шагов:

- деление всего периода $[0, t]$ времени на k частей ($\Delta t = \frac{t}{k}$);
- расчет стоимости базового актива $S(t_{i+1})$ для каждой из k смоделированных случайных величин ε по следующей формуле:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon}$$

где $i = \overline{0, k-1}$;

- вычисление среднего арифметического значения цен базового актива S :

$$S = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} S(t_{i+1});$$

- повторение пунктов 2, 3 и 4 n раз;
- расчет стоимости опциона, используя для типа колл формулу и для типа пут формулу:

$$C = \frac{1}{n} e^{-rT} \max \left(\sum_{j=1}^n S_j - K, 0 \right)$$

$$P = \frac{1}{n} e^{-rT} \max \left(K - \sum_{j=1}^n S_j, 0 \right)$$

где K – страйк, S_j – среднее арифметическое значение цен базового актива.

Данные алгоритмы применяются в дальнейшем при создании программно-информационной системы для расчета стоимости опционов.

Для определения стоимости опционов реализована программно-информационная система, который предполагает расчеты для европейского и азиатского типов. Данная система выводит вычисляемую стоимость опциона, рассчитанную при помощи метода Монте-Карло и некоторые характеристики, помогающие в планировании инвестиционной стратегии.

Система представляет собой web-сайт, написанный на Laravel (бесплатный фреймворк для разработки веб-приложений на PHP). PHP – это популярный скриптовый язык общего назначения, который особенно подходит для веб-разработки. Математические функции PHP отвечают потребностям для реализации метода Монте-Карло и подробно освещены в источнике [2].

Пользователю доступен выбор типа опционов:

- колл или пут;
- европейский или азиатский.

При нажатии на кнопку «Рассчитать» при помощи метода Монте-Карло и алгоритмам, описанным выше, рассчитывается стоимость опциона.

Для анализа и дальнейшего планирования стратегии рассчитываются и выводятся дополнительные сведения о стоимостях опциона и прибыли для выбранной стоимости базового актива пользователя, а также для ее окрестностей. Пример расчета продемонстрирован на рис. 1.

Цена базового актива	Стоимость опциона	Прибыль
78	11.7262	0.2738
91	13.6204	0.3796
104	15.5386	0.4614
117	17.9649	0.0351
130	20.0863	-0.0863
143	21.854	0.146
156	23.9216	0.0784
169	26.5323	-0.5323
182	28.2851	-0.2851

Рис. 1. Дополнительные сведения об окрестных ценах базового актива и прибыли

Прибыль опциона рассчитывается здесь по следующим формулам:

- для опциона типа колл: разность цены актива, страйк и стоимость опциона;
- для опциона типа пут: разность страйк, цены актива и стоимость опциона.

Кроме того, для наиболее детального анализа выводятся дополнительные графики:

- зависимость премии (стоимости опциона) от цены базового актива;
- зависимость премии (стоимости опциона) от страйка.

Данный функционал представлен на рис. 2 и 3.

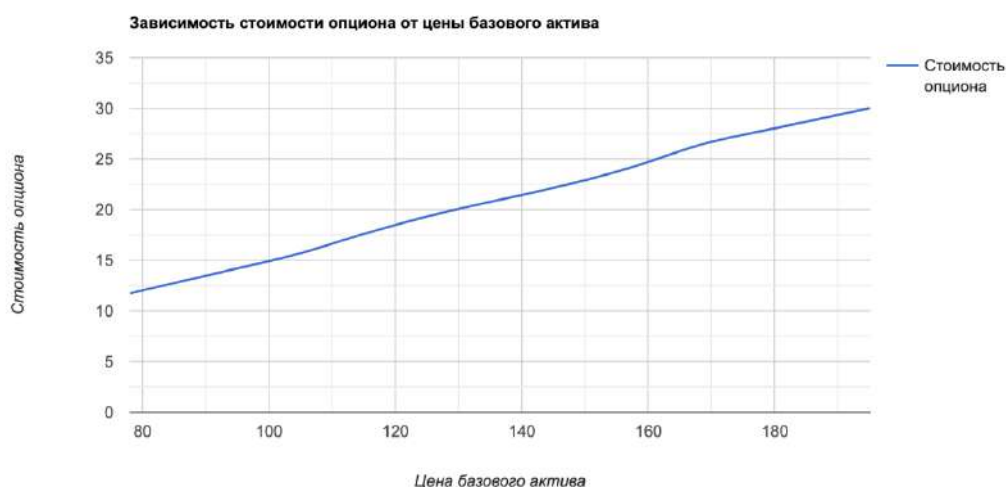


Рис. 2. Зависимость премии от цены базового актива

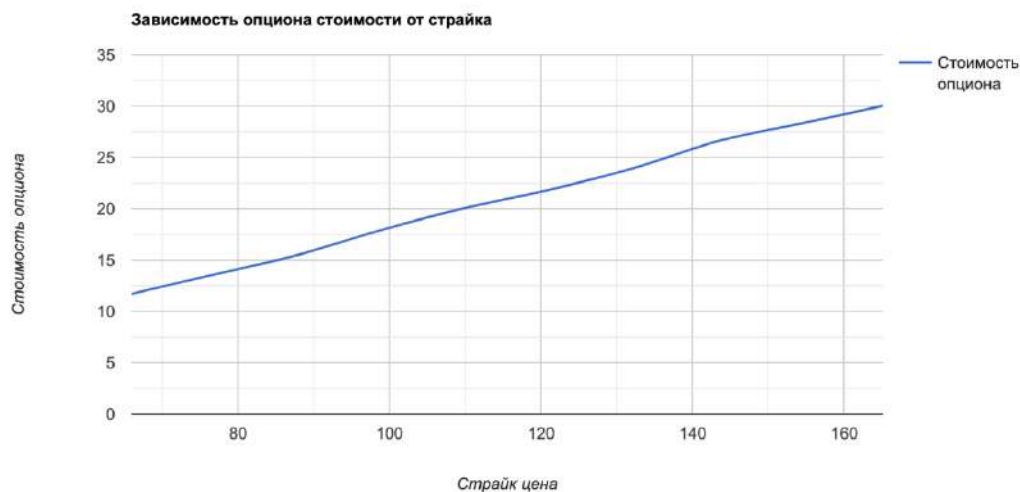


Рис. 3. Зависимость премии от страйка

Таким образом, метод Монте-Карло является важным и широко применяемым инструментом для моделирования случайных финансовых процессов и принятия обоснованных финансовых решений, позволяющий учитывать стохастичность рынка.

Список литературы

1. Богданов А. В., Мареев В. В., Степанов Э. А., Панченко М. В. Моделирование поведения опционов. Формулировка проблемы // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 11, № 3. С. 759–766.
2. PHP: Математические функции Manual. 2001. URL: <https://www.php.net/manual/ru/ref.math.php> (дата обращения: 10.02.2024).

ОБ ОДНОМ ИЗ МЕТОДОВ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ

Екатерина Юрьевна Бельдягина¹,
Алла Аркадьевна Дмитриева²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹belkapnzpgy@mail.ru, ²almilen@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача регрессионного анализа статистических данных с применением среды R. Продемонстрирована возможность решения задачи прогнозирования критических событий в городской среде.

Ключевые слова: математическое моделирование, прогнозирование, статистический анализ, критические события, машинное обучение, линейная регрессия, нелинейная регрессия

ABOUT ONE OF THE METHODS FOR SOFTWARE IMPLEMENTATION OF FORECASTING CRITICAL EVENTS

Ekaterina Yu. Beldyagina¹, Alla A. Dmitrieva²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹belkapnzpgy@mail.ru, ²almilen@mail.ru

Abstract. The article discusses the problem of regression analysis of statistical data using the R environment. The possibility of solving the problem of predicting critical events in an urban environment is demonstrated.

Keywords: Mathematical modeling, forecasting, statistical analysis, critical events, machine learning, linear regression, nonlinear regression

Предиктивный анализ критических событий является одним из методов анализа данных, который применяется в различных сферах и концентрируется на прогнозировании будущего поведения объектов и субъектов с целью принятия оптимальных решений и предотвращения критических событий в городской среде и за её пределами.

Для моделирования критических событий используются различные методы, включая математическое моделирование, компьютерное моделирование и симуляцию. Эти методы позволяют создать модель кризисной ситуации, которая может быть использована для тестирования различных стратегий и тактик, которые могут быть использованы в реальной жизни.

Построение математической модели является важнейшим этапом при решении задач и исследовании процессов в различных научных областях. Математическая модель представляет собой абстрактное описание реального явления, которое основывается на некоторых предположениях и упрощениях [1]. Она позволяет предсказывать поведение системы в различных условиях, оптимизировать ее функционирование, а также обеспечивает возможность проводить эксперименты в виртуальной среде, что особенно важно в тех случаях, когда эксперименты в реальном мире стоят дорого или невозможны.

Распространённым и доступным для изучения методом является регрессионный анализ и студенты могут применять его для предиктивного прогнозирования [2].

Рассмотрим, как пример, анализ в среде R зависимости количества ДТП за 12 месяцев 2023 года по городу Пенза от количества осадков в мм за месяц. Данные представим в таблице 1.

Таблица 1

Данные ежемесячных наблюдений о количестве осадков и числе ДТП за 12 месяцев 2023 года

Количество осадков, мм	Количество ДТП, шт(y)
39.1	74
22.1	52
30.7	75
37.6	79
27.1	65
46.3	76
32.7	71
43.1	85
42.4	75
43.3	80
28.3	67
38.9	80

Визуализируем заданные значения:

```
#createsomefakedata
data <- data.frame(x = c(39.1,22.1,30.7,
37.6,27.1,46.3,32.7,43.1,42.4,42.3,28.3,38.9),
y = c(74,52,75,79,65,76,71,85,75,80,67,80))
#create scatterplot of data
plot(data$x, data$y)
```

Результат визуализации приведен на рис. 1. Заданное расположение данных не позволяет точно судить о форме регрессионной модели.

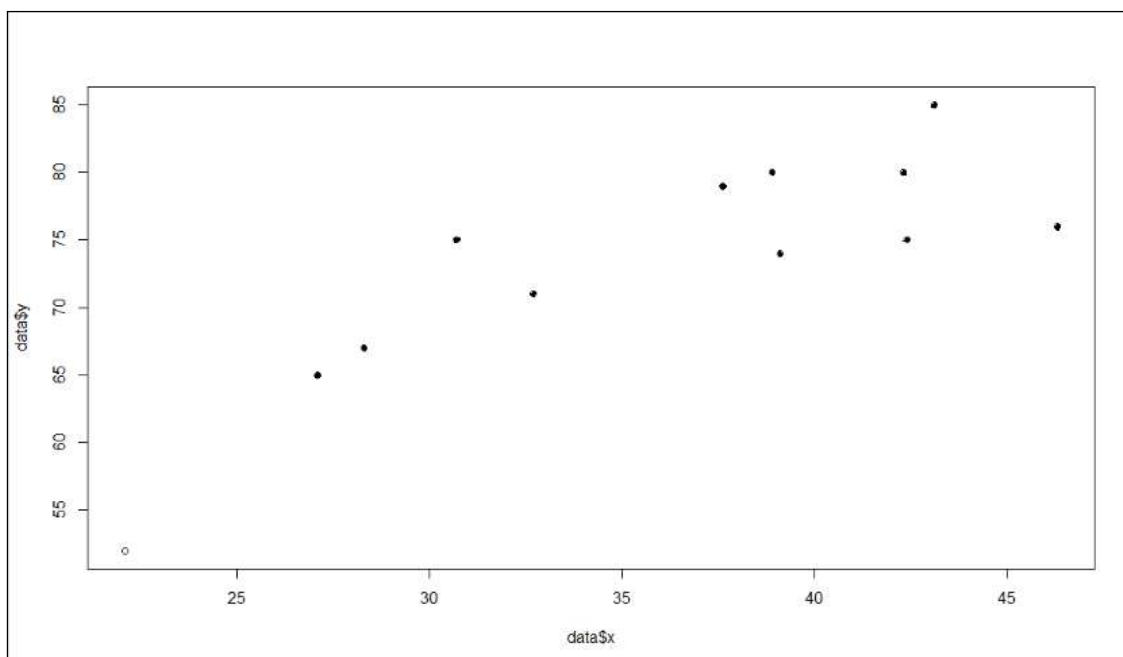


Рис. 1. Визуализация условия задачи

Начнём с построения линейной регрессии и проверки статистики R^2 .

Найдём параметры линии регрессии $y=ax+b$:

```
#create data frame
data <- data.frame(x = c(39.1,22.1,30.7,
37.6,27.1,46.3,32.7,43.1,42.4,42.3,28.3,38.9),
y = c(74,52,75,79,65,76,71,85,75,80,67,80))
#fit linear regression model to data
model <- lm(y ~ x, data=data)
#view summary of model
summary(model)
```

В результате работы программы получим в том числе значение статистики

$R^2 = 70,87 \%$, которое указывает на достаточно высокую степень достоверности полученной линии $y=0,9736x+38,3152$ заданным экспериментальным точкам. Проиллюстрируем это, построив в поле рассеяния линию регрессии.

```
#fit a simple linear regression model
model <- lm(y ~ x, data = data)
#add the fitted regression line to the scatterplot
abline(model)
```

Результат представлен на рис. 2.

Форма облака рассеяния позволяет предположить наличие тренда экспоненциальной формы, проверим это предположение, найдём параметры уравнения регрессии вида $y=a \cdot b^x$.

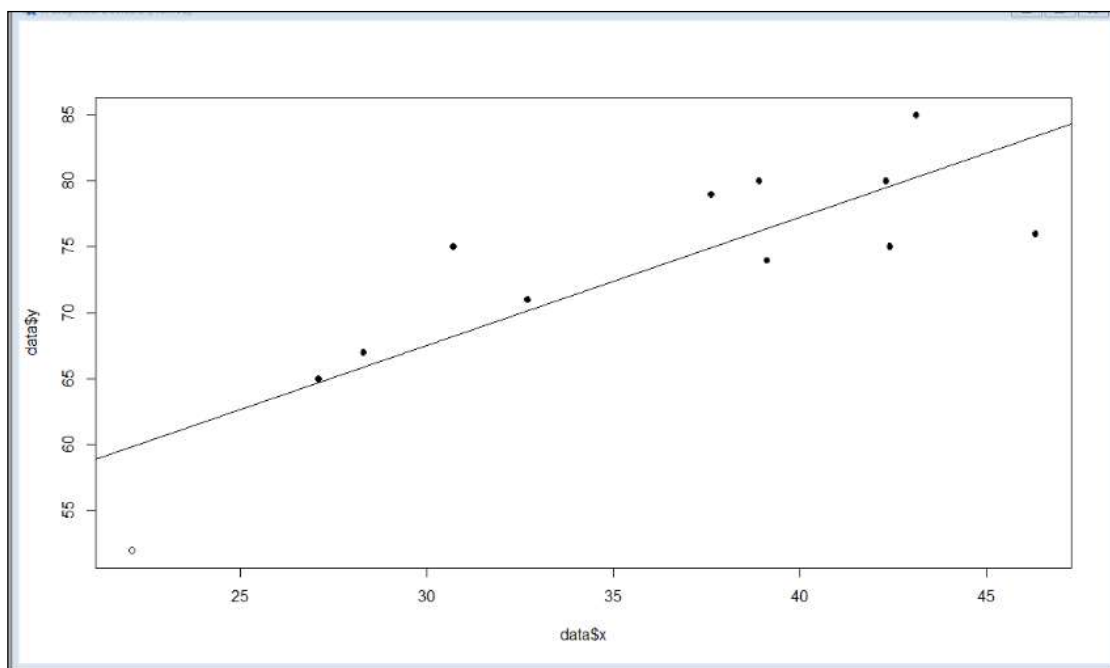


Рис. 2. Прямая регрессии для построенной модели

Визуализация данных:
 $x = c(39.1, 22.1, 30.7, 37.6, 27.1, 46.3, 32.7, 43.1, 42.4, 42.3, 28.3, 38.9)$
 $p = c(74, 52, 75, 79, 65, 76, 71, 85, 75, 80, 67, 80)$
 $y = c(\log(p, \text{base} = \exp(1)))$
 $\text{plot}(x, y)$

Результат представлен на рис. 3.

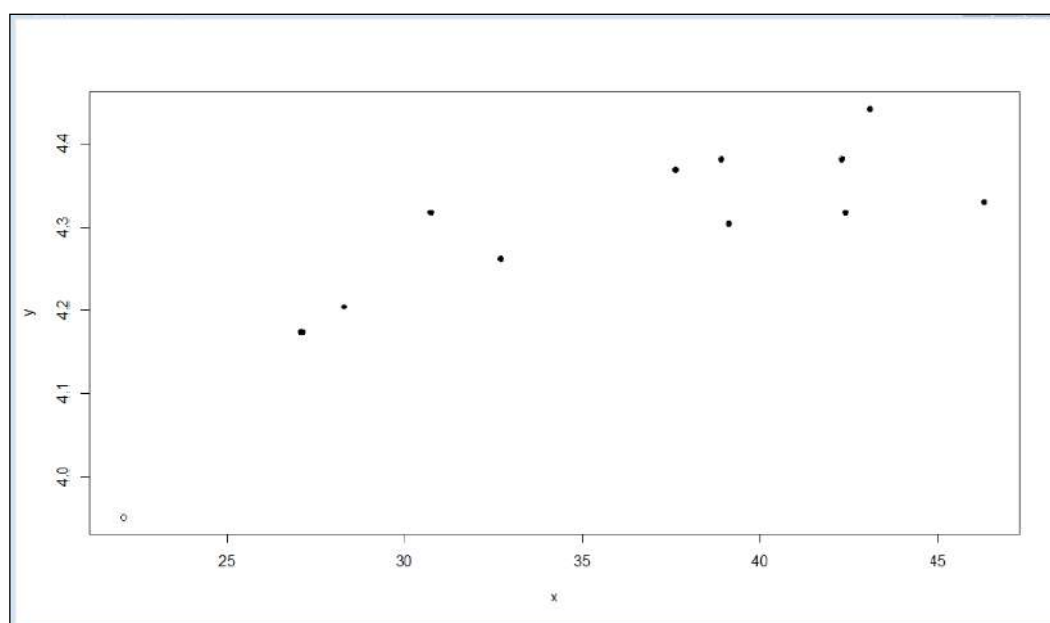


Рис. 3. Визуализация экспериментальных данных

Найдём коэффициенты модели a и b
#fit the model
model <- lm(log (y)~ x)
#view the output of the model
summary(model)

В результате работы программы получим уравнение искомого вида $\ln y = 1,3324 + 0.0034x$ или $y = 3.79 \cdot 1.0034^x$

Значение статистики $R^2 = 69,41\%$, значит линейная регрессия целесообразнее для заданных данных.

Задача подбора линии тренда решена, для достижения большей точности может быть произведен подбор уравнений регрессии других видов, для дальнейшего прогнозирования количества ДТП в зависимости от количества осадков. Студенты в процессе решения данной задачи смогут успешно овладеть начальными навыками анализа данных и получить возможность дальнейшего освоения предиктивной аналитики, которая позволяет принимать более обоснованные и эффективные решения на основе анализа большого объема данных и прогнозирования будущих тенденций[3].

Список литературы

1. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / под ред. П. В. Трусова. М. : Логос, 2004. 440 с.
2. Шаныгин С. И. Корреляционный и регрессионный анализ : учебник для вузов / отв. ред. В. В. Ковалев. М. : Юрайт, 2024. 70 с.
3. Буре В. М., Парилина Е. М., Седаков А. А. Методы прикладной статистики в R и Excel : учеб. пособие. 2-е изд., стер. СПб. : Лань, 2018. 152 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР В ЭКОНОМИКЕ: ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

**Ирина Михайловна Мойко¹,
Дарья Владимировна Папшева²**

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹irmojko@yandex.ru, ²papshevadash@mail.ru

Аннотация. Фрактальная геометрия предоставляет инструменты для анализа сложных и нерегулярных структур, которые часто встречаются в экономике. Рассматриваются возможности применения фрактальных моделей для описания экономических процессов. Приводятся аспекты применения фрактальных моделей в экономике.

Ключевые слова: фрактальные модели, экономические процессы, фрактальная геометрия, финансовые рынки, прогнозирование, экономические тенденции, моделирование

MODELING FRACTAL STRUCTURES IN ECONOMY: CONSTRUCTION OF FRACTAL MODELS TO DESCRIBE ECONOMIC PROCESSES

Irina M. Moiko¹, Daria V. Papsheva²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹irmojko@yandex.ru, ²papshevadash@mail.ru

Abstract. Fractal geometry provides tools for analyzing complex and irregular structures that are often found in economics. The possibilities of using fractal models to describe economic processes are considered. Aspects of the application of fractal models in economics are considered.

Keywords: fractal models, economic processes, fractal geometry, financial markets, forecasting, economic trends, modeling

Введение

Фракталы – это математические объекты, которые обладают самоподобием на различных масштабах. Изображения фракталов часто ассоциируются с природными формами, такими как горные хребты, облака или реки. Однако фракталы также могут быть использованы для моделирования и описания сложных динамических систем, таких как экономические процессы. Рассмотрим часто встречающиеся подходы к моде-

лированию фрактальных структур в экономике [1–2]: модель Мандельброта, метод случайных блужданий и модель самоорганизации.

1. Модель Мандельброта. Модель Мандельброта основана на идее фрактальной структуры ценового движения активов на финансовых рынках. В этой модели цены активов представлены как случайная последовательность, которая меняется со временем. Фрактальный аспект заключается в том, что ценовое движение на различных временных масштабах имеет одинаковую форму и структуру. Для моделирования фрактальных структур в экономике с помощью модели Мандельброта необходимо определить параметры, такие как средняя доходность и волатильность актива. Затем можно смоделировать ценовое движение актива с использованием геометрического броуновского движения или других стохастических процессов.

2. Метод случайных блужданий. Метод случайных блужданий основан на идее, что изменения цен активов являются случайными и независимыми. Этот метод используется для моделирования фрактальных временных рядов и описания феномена "памяти" в финансовых данных. Для моделирования фрактальных структур с помощью метода случайных блужданий можно использовать различные модели, такие как модель Гарча-Гарча или модель ARIMA. Эти модели учитывают зависимость текущего значения от предыдущих значений и позволяют аппроксимировать фрактальные временные ряды.

3. Модель самоорганизации. Модель самоорганизации основана на идее эмерджентности и взаимодействии множества агентов в экономической системе. Эта модель объясняет, как макроэкономические явления и структуры могут возникать из микроэкономических взаимодействий. Для моделирования фрактальных структур с помощью модели самоорганизации необходимо определить правила поведения агентов, их взаимодействия и параметры модели. Можно использовать методы компьютерного моделирования, такие как моделирование на основе агентов или системы дифференциальных уравнений, чтобы описать взаимодействия агентов и их эмерджентное поведение.

Применение фрактальных моделей в экономике может быть полезным для описания и прогнозирования различных экономических процессов. Рассмотрим несколько примеров применения фрактальных моделей в экономике [3]:

✓ Прогнозирование финансовых временных рядов. Фрактальные модели могут быть использованы для прогнозирования изменений цен активов, волатильности рынка и других финансовых временных рядов благодаря своей способности учитывать нелинейность, самоподобие и эмерджентное поведение в экономических данных. Вот

несколько способов, которыми фрактальные модели могут быть применены для прогнозирования финансовых временных рядов:

- анализ фрактальной структуры: фрактальные модели позволяют обнаружить фрактальную структуру в финансовых временных рядах, что может быть полезно для выявления скрытых паттернов и закономерностей (например, при помощи методов анализа масштабируемости можно определить фрактальные характеристики волатильности рынка);

- прогнозирование на основе самоподобия: благодаря своему свойству самоподобия на различных масштабах, фрактальные модели могут быть использованы для прогнозирования будущего движения цен активов. Такие методы, как масштабируемый анализ или моделирование на основе фрактальных уравнений, позволяют предсказывать изменения цен с учетом их фрактальной структуры;

- моделирование волатильности: фрактальные модели могут быть применены для прогнозирования волатильности рынка и оценки рисков. Такие модели учитывают нелинейное поведение цен и волатильности на различных временных масштабах, что помогает более точно оценивать вероятность краткосрочных и долгосрочных колебаний цен активов;

- учет фрактальной зависимости: учитывается фрактальная зависимость между текущими и предыдущими значениями, что позволяет создавать прогнозы, основанные на анализе долгосрочных тенденций и корреляций.

✓ Моделирование экономического роста. Фрактальное моделирование может объяснить рост нелинейной динамики экономического роста и поиска оптимальных стратегий развития экономики.

Рассмотрим несколько способов:

- учет фрактальной структуры экономических данных: учитывается нелинейность и самоподобие в экономических временных рядах, таких как ВВП, инфляция или безработица (это приводит к лучшему пониманию долгосрочных тенденций и цикличности в экономике, что является важным для формулирования стратегий развития).

- моделирование эмерджентного поведения: фрактальные модели позволяют объяснить эмерджентное поведение экономических систем, то есть возникновение коллективных свойств и структур из взаимодействий между отдельными агентами, что бывает полезно при изучении процессов формирования рынков.

- оптимизация стратегий развития (можно исследовать влияние различных политических мер на экономический рост и определить оптимальные меры для достижения желаемых результатов).

- прогнозирование экономического роста.

✓ Анализ финансовых рынков. Фрактальные модели играют важную роль в анализе структуры финансовых рынков из-за их способности описывать сложные и нерегулярные процессы, которые часто встречаются в финансовой сфере. Это:

- выявление фрактальных закономерностей: позволяет обнаружить фрактальные закономерности в динамике цен на финансовых рынках (ценовые движения на рынке могут иметь фрактальную структуру).

- распознавание фрактальных паттернов (фрактальные уровни поддержки и сопротивления могут быть выявлены с использованием фрактальной геометрии, что поможет трейдерам и аналитикам принимать более осознанные решения.

- прогнозирование ценовых движений: анализ фрактальных закономерностей может помочь выявить тенденции и цикличность в рыночной динамике, что может быть полезно для разработки стратегий инвестирования и торговли.

✓ Моделирование социально-экономических систем. Фрактальное моделирование является полезным инструментом при моделировании социально-экономических систем из-за его способности учитывать сложные и нерегулярные динамики, которые часто наблюдаются в таких системах. Вот несколько способов, как фрактальное моделирование может использоваться в этом контексте:

- моделирование роста и развития: используя фрактальные законы и шаблоны, можно попытаться описать эволюцию системы со временем;

- прогнозирование поведения системы: анализ фрактальной структуры системы может помочь понять, как система реагирует на изменения внешних условий;

- оптимизация ресурсов;

- исследование динамики сетей и связей: понимание фрактальной структуры связей между различными элементами системы может помочь выявить ключевые факторы, влияющие на ее функционирование.

Заключение.

Фрактальные модели предоставляют мощный инструмент для описания и анализа экономических процессов. Они позволяют учесть сложность и нелинейность в экономических данных, а также объяснить фрактальную структуру и самоподобие в различных аспектах экономики. Применение фрактальных моделей может помочь в прогнозировании, анализе и планировании экономических процессов, что имеет важное значение для принятия обоснованных решений в сфере экономики и финансов.

Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М. : Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.
3. Прудский М. В. Фрактальный анализ финансовых рынков // Информационные системы и математические методы в экономике. 2012. № 5.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ВЫПУСКНИКОВ-СПЕЦИАЛИСТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ
НАПРАВЛЕНИЙ ПЕНЗЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**Татьяна Вячеславовна Черушева¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²,
Павел Владимирович Айкашев³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru,

³aikashev.pavek@mail.ru

Аннотация. Неравновесие между спросом и предложением специалистов высшей и средней квалификации на рынке труда вызывает потери человеческого капитала и затрудняет инновационное и научно-технологическое развитие. Анализ показывает, что дефицит специалистов в области инженерии и техники в России связан с развитием экономики страны и уменьшением престижа инженерных профессий, что приводит к увеличению числа специалистов, работающих не по специальности.

Исследование включает экономическую модель, которая позволяет прогнозировать распределение выпускаемых инженеров-специалистов в Пензенском государственном университете. Результаты показывают, что проблема неравновесия спроса и предложения специалистов инженерной отрасли существует. Доля выпускаемых инженеров-специалистов сокращается на фоне увеличения общего числа выпускников.

Ключевые слова: модель спроса-предложения, математическая модель, прогнозирование

**MODELING THE DISTRIBUTION INDICATORS
OF GRADUATING ENGINEERING SPECIALISTS AT PSU**

**Tatyana V. Cherusheva¹, Natalia V. Zverovshchikova²,
Pavel V. Aikashev³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru,

³aikashev.pavek@mail.ru

Abstract. The imbalance between the demand and supply of high and medium-skilled professionals in the labor market leads to losses of human capital and hinders innovation and scientific-technological development. Analysis shows that the

shortage of engineering and technical specialists in Russia is linked to the country's economic development and the decreasing prestige of engineering professions, resulting in an increase in the number of specialists working outside their field.

The study includes an economic model that allows forecasting the distribution of graduating engineering specialists at Penza State University. The results indicate that the issue of imbalance between the demand and supply of engineering specialists persists. The proportion of graduating engineering specialists decreases as the total number of graduates increases.

Keywords: demand-supply model, mathematical model, forecasting

Введение

Для успешной модернизации экономики России и стимулирования инновационной активности необходимо уделить особое внимание проблемам спроса и предложения инженерно-технических кадров. Ситуация с нехваткой опытных специалистов в этой области, особенно при ограниченном притоке молодых специалистов, привлекает внимание многих работодателей. Начиная с конца 1990-х годов, после снижения спроса со стороны промышленных предприятий в период перестройки, ситуация с дефицитом инженеров и техников в России начала изменяться только в начале 2000-х годов в связи с общим экономическим подъемом. Однако к 2014 году работодатели уже отмечали острую нехватку такого персонала. Несмотря на это, существуют проблемы с качеством обучения, взаимодействием работодателей и университетов, а также с обеспечением возможностей трудоустройства для молодых специалистов. Исследования в этой области направлены на анализ причин нехватки и избытка квалифицированных кадров, а также на изучение тенденций в научно-техническом персонале.

Недавние глобальные события, такие как распространение COVID-19 и санкции против России, оказали значительное влияние на баланс спроса и предложения на рынке труда инженерно-технических специалистов. Это подчеркивает актуальность задачи моделирования распределения выпускников по инженерно-техническим специальностям. Работа над математической моделью, моделирующей количество поступающих и выпускаемых специалистов в этой области, является важным шагом в решении указанных проблем.

1. Моделирование числа выпускников инженерно технических специальностей и общего выпуска в Пензенском государственном университете

Существующие математические модели, которые применяются для анализа ситуации на рынке труда в целом, оказываются менее эффективными при моделировании отдельных узких сегментов из-за недостатка необходимых данных по конкретным областям. В связи с этим

авторы разработали математические модели, которые позволяют более точно оценивать распределение инженерно-технических специалистов, выпускаемых Пензенским государственным университетом.

В предыдущих исследованиях авторов были построены две модели: простейшая и ее более сложная модификация, учитывающая большее количество факторов. Простейшая модель [1] состояла из двух блоков, связывающих количество выпускаемых инженеров с численностью занятых инженеров. Модифицированная модель уже включала три блока: блок выпускаемых студентов, блок занятых инженеров вне своей специальности и блок инженеров, работающих по специальности [2].

На основе разработанной модели распределения бакалавров [3] была построена модель распределения выпускников инженерно-технических специальностей среди специалистов ПГУ. Эта модель учитывает потребность в специалистах данного профиля, влияние заработной платы в разных сферах труда, отток специалистов из технической сферы и стремление к дальнейшему образованию.

Основные блоки модели. Модель распределения выпускников специалистов ПГУ состоит из 5 блоков.

1. Блок спроса на ИТС на рынке труда.

$$DEM(t) = c_0(DEM(t-1) - ET(t-1)) + c_1ET(t-1) + d_1DEM(t-1). \quad (1)$$

2. Численность абитуриентов, поступающих на специалитет, с учетом количества поступивших за последние пять лет и влияния запроса на выпускников

$$GA(t) = s_{21}GA(t-1) + s_{22}GA(t-2) + s_{23}GA(t-3) + \quad (2) \\ + s_{24}GA(t-4) + s_{25}GA(t-5) + d_2DEM(t),$$

где $s_{2i}, i = 1, 2, 3, 4, 5$ – коэффициент, характеризующий влияние количества поступивших i лет назад на объем приема абитуриентов-специалистов в текущем году; d_2 – коэффициент, характеризующий изменение запросов на выпускников в зависимости от ситуации на рынке труда.

3. Численность абитуриентов, продолжающих обучение в аспирантуре по окончании специалитета, за последние пять лет

$$GY(t) = s_{51}GY(t-1) + s_{52}GY(t-2) + s_{53}GY(t-3) + \quad (3) \\ + s_{54}GY(t-4) + s_{55}GY(t-5),$$

где $s_{5i}, i = 1, 2, 3, 4$ – коэффициент, характеризующий влияние количества выпускников i лет назад на количество продолживших свое обучение в аспирантуре в текущем году.

4. Численность выпускаемых инженеров-специалистов, с учетом количества поступивших за последние пять лет

$$GE(t) = s_{31}GA(t-1) + b_{32}GA(t-2) + s_{33}GA(t-3) + s_{34}GA(t-4) + s_{35}GA(t-5) \quad (4)$$

где $s_{3i}, i=1,2,3,4$ – коэффициент, характеризующий влияние количества выпускников i лет назад специалистов на объем выпуска инженеров в текущем году.

5. Число занятых ИТС

$$ET(t) = et(t)GE(t), \quad (5)$$

$$et(t) = s_{41} \frac{DEM(t)}{GE(t)} + s_{42}wr(t) + c_3, \quad (6)$$

$$wr(t) = s_{43} \frac{wr(t-1)DEM(t)}{GE(t)}, \quad (7)$$

$$EE(t) = s_{61}GE(t). \quad (8)$$

Математическую модель (1)-(8) в явном виде выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} DEM(t) = c_0(DEM(t-1) - ET(t-1)) + c_1ET(t-1) + d_1DEM(t-1), \\ GA(t) = s_{21}GA(t-1) + s_{22}GA(t-2) + s_{23}GA(t-3) + s_{24}GA(t-4) + s_{25}GA(t-5) + d_2DEM(t), \\ GY(t) = s_{51}GY(t-1) + s_{52}GY(t-2) + s_{53}GY(t-3) + s_{54}GY(t-4) + s_{55}GY(t-5), \\ GE(t) = s_{31}GA(t-1) + b_{32}GA(t-2) + s_{33}GA(t-3) + s_{34}GA(t-4) + s_{35}GA(t-5), \\ ET(t) = et(t)GE(t), \\ et(t) = s_{41} \frac{DEM(t)}{GE(t)} + s_{42}wr(t) + c_3, \\ wr(t) = s_{43} \frac{wr(t-1)DEM(t)}{GE(t)}, \\ EE(t) = s_{61}GE(t). \end{array} \right. \quad (9)$$

Оценки параметров модели были получены с использованием данных по количеству выпускников ПГУ за 2019–2023 гг., источ-

никами информации был региональный центр содействия и адаптации выпускников ПГУ [4]. Параметры модели (1)–(8) были оценены с помощью метода максимального правдоподобия табл. 1.

Таблица 1

Информация о специалистах технических направлений Пензенского государственного университета за 2020–2023 гг.

	2019	2020	2021	2022	2023
Поступление	297	275	314	314	310
Выпуск	167	196	163	122	215
Трудоустроенные по специальности	142	146	132	86	172
Трудоустроенные не по специальности	4	6	7	7	8
Решившие продолжить обучение	9	17	14	17	28

2. Результаты моделирования и апробация модели

При построении прогноза распределения специалистов с помощью разработанной математической модели (9) были получены следующие результаты, показанные на рисунках 1(а) и 1(б).

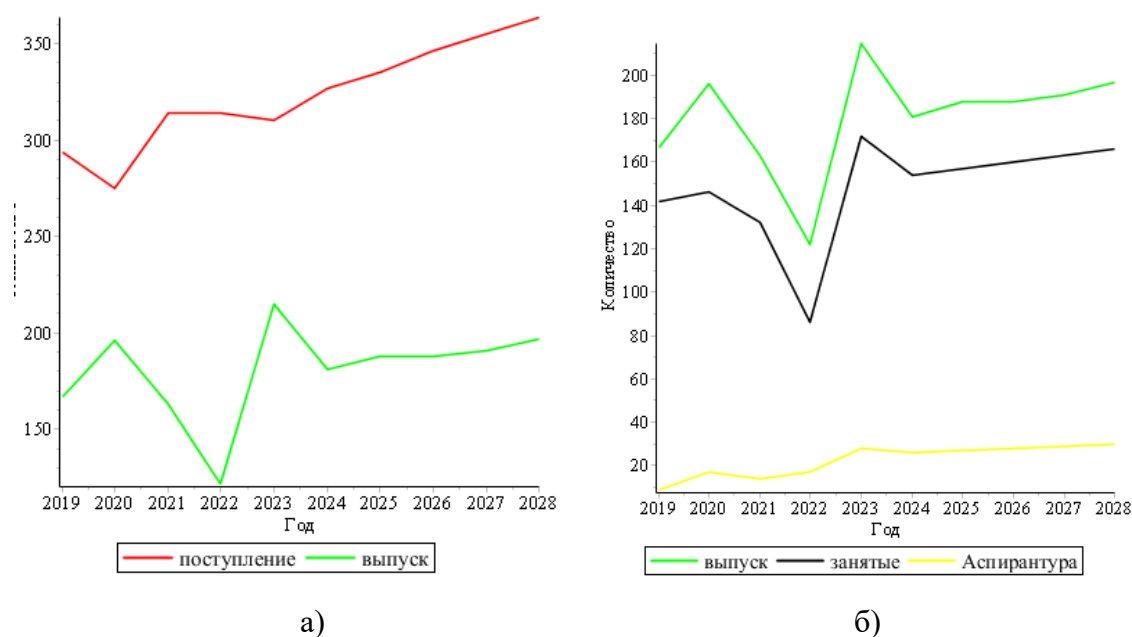


Рис. 1. Сравнение полученных результатов распределения выпускаемых специалистов ПГУ: а) фактическая численность поступивших и выпуска в соответствующий год специалистов (до 2023), и прогноз поступления и выпуска специалистов; б) сравнение количества выпускаемых и устроившихся по специальности выпускников и количества выпускников, продолживших обучение в аспирантуре

Разработанная модель позволяет проводить предварительное моделирование распределение занятых ИТС без учета изменения макроэкономических показателей.

Список литературы

1. Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. Анализ моделей спроса и предложения инженерно-технических специалистов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : тр. XVII Междунар. конф. / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 170–178.
2. Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. Моделирование показателей выпуска и занятости инженерно-технических специалистов ПГУ // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : тр. XVII Междунар. конф. / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 85–88.
3. Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. Моделирование распределения выпускников инженерно-технических специалистов ПГУ // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : тр. XVIII Междунар. конф. / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2023.
4. Региональный центр содействия трудоустройству и адаптации выпускников ПГУ : сайт. URL: <https://lider.pnzgu.ru/> (дата обращения: 12.03.2024).

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 517.925:612.8

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛИ ФИТЦХЬЮ – НАГУМО ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Мария Андреевна Кутыркина¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия
¹mariahkutyrkina@yandex.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Представлены результаты анализа устойчивости модели ФитцХью – Нагумо по части переменных методом Е. В. Воскресенского. Исследование позволяет лучше понять поведение системы в условиях изменения параметров и переменных, что может быть полезно для прогнозирования ее долгосрочного поведения и стабильности.

Ключевые слова: динамическая модель, устойчивость по части переменных, асимптотика

STABILITY STUDY OF THE MODEL FITZHUGH-NAGUMO IN PART OF VARIABLES

Maria A. Kutyrkina¹, Tatiana F. Mamedova²

^{1,2}National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹mariahkutyrkina@yandex.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. This paper presents the results of analyzing the stability of the FitzHugh-Nagumo model with respect to some variables using the method of E.V. Voskresensky. The study allows us to better understand the behavior of the system under conditions of changing parameters and variables, which can be useful for predicting its long-term behavior and stability.

Keywords: dynamic model, stability in terms of variables, asymptotics

Рассмотрим модель нейрона ФитцХью – Нагумо. Эта модель описывает динамику мембранного потенциала нейрона. В отличие от более сложных моделей, таких как модель Ходжкина-Хаксли, модель

ФитцХью – Нагумо проще и упрощает анализ основных характеристик нейрона [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1^3 - x_2 + I \\ \tau \frac{dx_2}{dt} = x_1 - a - bx_2 \end{cases}, \quad (1)$$

где x_1 – потенциал мембраны; x_2 – переменная восстановления; I – величина стимулирующего тока (эта переменная изображает экспериментальное подключение тока к мембране); τ – время, в течение которого происходит изменение переменной восстановления; a – скорость восстановления мембранного потенциала; b – отношение между возбуждением и торможением.

Из экспериментов для этой модели известно, что:

1. В начальный момент времени нейрон находится в состоянии покоя.
2. При небольшом изменении потенциала, нейрон вернется в состояние покоя.
3. При сильном возбуждении, превышающем определенную граничную величину, потенциал увеличится до очень высокого значения, что приведет к генерации спайка.
4. После спайка нейрон вернется в состояние покоя.

Для численной реализации системы выберем следующие параметры $I = 10$; $a = -0,7$; $b = 0,8$; $\tau = 12,5$.

Тогда система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1^3 - x_2 + 10, \\ 12,5 \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 0,7 - 0,8x_2, \end{cases} \quad (2)$$

Исследуем на устойчивость по части переменных решение этой системы. Для этого применим метод Воскресенского Е. В [1, 2].

Перейдем к исследованию нулевого решения соответствующего первого линейного приближения, имеющего вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -11,6075y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 0,08y_1 - 0,064y_2. \end{cases} \quad (3)$$

Для систем дифференциальных уравнений (2) и (3) было показано, что для них выполняются все условия асимптотической эквивалентности по части переменных из алгоритма Воскресенского. Следовательно, эти системы удовлетворяют условиям теоремы:

Теорема [2]. Если система уравнений (3) устойчива по части переменных, то тривиальное решение системы уравнений (2) также устойчиво по части переменных и, если система уравнений (3) неустойчива по части переменных, то тривиальное решение системы уравнений (2) также неустойчиво по этой же части переменных.

Таким образом, все условия теоремы выполняются и можно сделать вывод, что рассматриваемая математическая модель устойчива по всем переменным при наложенных допущениях и может быть использована для дальнейших прогнозов.

Результаты численного эксперимента подтверждает сделанные теоретические выводы.

Данная система была реализована в среде разработки Google Colaboratory. Преимуществами этой среды являются высокая вычислительная скорость и возможность использования Python-библиотек для анализа данных онлайн. Программирование осуществлялось с применением библиотек NumPy и SciPy, предлагающих широкий спектр опций для численного моделирования.

График решения данной системы показывает, что она устойчива. Переменные имеют тенденцию возвращаться к исходному положению.

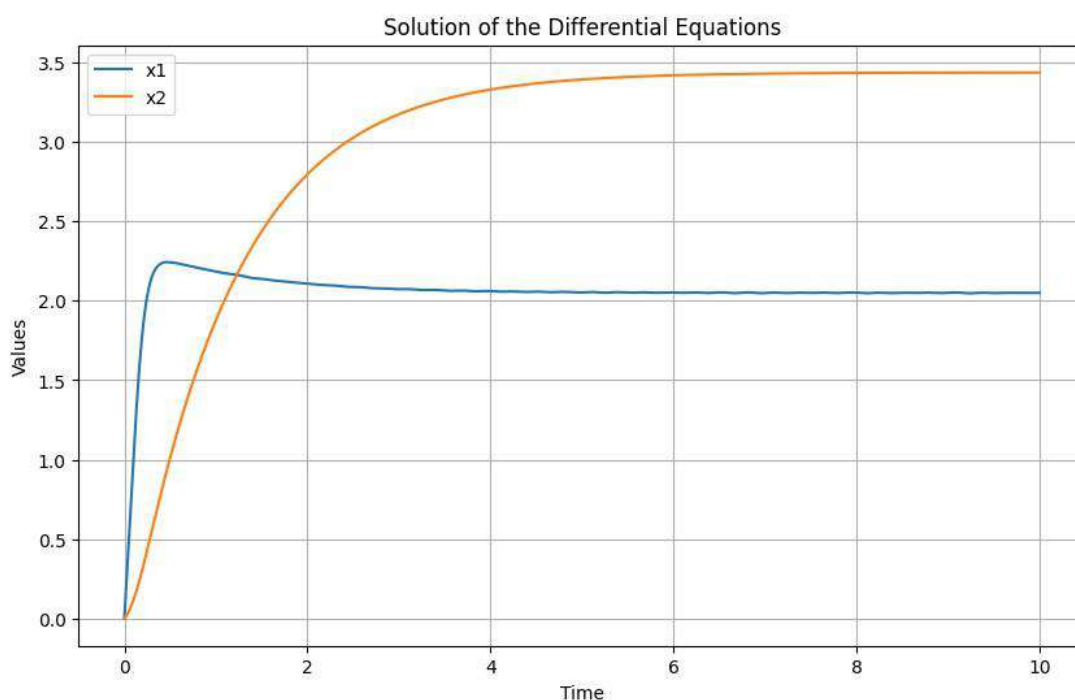


Рис. 1. График решения системы

График решения данной системы так же показывает, что она устойчива по всем переменным. Переменные имеют тенденцию возвращаться к исходному положению [3].

Список литературы

1. FitzHugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane // Biophys J. 1961. P. 445–466.
2. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск : СВМО, 2000. 300 с.
3. Воскресенский Е. В. Метод сравнения в нелинейном анализе // Сибирский математический журнал. 1991. № 5. С. 2–11.

ОБЗОР НЕКОТОРЫХ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Алиса Саубьяновна Аюпова¹,
Юлия Фридриховна Захарова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹alisya.ayupova.2013@mail.ru, ²olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются основные понятия криптографии. Проводится обзор следующих криптографических алгоритмов: RSA, AES, шифр Шамира.

Ключевые слова: криптография, шифр, ключ

OVERVIEW OF SOME CRYPTOGRAPHIC ALGORITHMS

Alisa S. Ayupova¹, Yulia F. Zakharova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹alisya.ayupova.2013@mail.ru, ²olegzakharov@rambler.ru

Abstract. The basic concepts of cryptography are discussed. The following cryptographic algorithms are reviewed: RSA, AES, Shamir cipher.

Keywords: cryptography, cipher, key

Криптография – это раздел прикладной математики, который изучает модели, методы, алгоритмы, программные и аппаратные средства преобразования информации в целях сокрытия ее содержания, предотвращения видоизменения или несанкционированного использования. Она занимается поиском и исследованием математических методов преобразования информации, и дает возможность преобразовать информацию таким образом, что ее прочтение (восстановление) возможно только при знании ключа.

Фактически, некоторые из самых ранних применений криптографии были основаны на теории графов. Например, шифр Цезаря, который использовал Юлий Цезарь для шифрования своих военных сообщений, представляет собой разновидность графовой криптографии. Шифр можно представить в виде графа, в котором каждая буква является вершиной, а каждое ребро представляет собой возможную замену.

В современном мире обеспечение безопасности информации становится ключевой задачей. Стремительное развитие технологий при-

водит к появлению новых задач в области криптографии. Растут требования разработки и применения либо новых методов шифрования, либо усовершенствования имеющихся. Далее дадим некоторые важные определения.

Существующие криптосистемы можно разделить на два класса – симметричные и асимметричные. В симметричных схемах шифрования (классическая криптография) секретный ключ шифрования совпадает с секретным ключом дешифрования. В асимметричных схемах шифрования (криптография с открытым ключом) ключ шифрования не совпадает с ключом дешифрования.

Ключ шифрования – это комбинация символов, которую использует специальный алгоритм для преобразования информации.

Открытый ключ (публичный ключ) – несекретный набор параметров асимметричной криптографической системы, необходимый и достаточный для выполнения отдельных криптографических преобразований.

Закрытый ключ (секретный ключ) – набор секретных параметров одного из алгоритмов асимметричной криптосистемы [1].

Шифрование обеспечивает три уровня безопасности информации:

1. Конфиденциальность: защищает информацию от неавторизованного доступа во время передачи или хранения.
2. Целостность: предотвращает изменение информации во время передачи или хранения.
3. Идентифицируемость: обеспечивает аутентификацию источника информации и предотвращает отказ отправителя от признания факта отправки данных.

Алгоритм RSA предложили в 1978 г. Он стал первым полноценным алгоритмом с открытым ключом, который может работать как в режиме шифрования данных, так и в режиме электронной цифровой подписи. Надежность алгоритма основывается на трудности факторизации больших чисел и трудности вычисления дискретных логарифмов.

Чтобы реализовать систему шифрования RSA, предназначенную для одного пользователя, необходимо выбрать два различных простых числа p , q и вычислить их произведение $n = pq$. Простые p и q хранятся в тайне, в то время как число n становится частью открытого ключа.

Для декодирования шифровки RSA мы должны знать числа p и q . Безопасность системы RSA определяется тем, что разложить число n на множители p и q трудно, поскольку они очень велики.

Сообщение шифруется с использованием возведения в степень по модулю. Исходный текст, содержащий только слова в верхнем регистре, заменяется числами согласно заранее заданной таблице замен, где пробел между словами заменяется на число 99. Полученное число, хотя может быть большим, представляет собой набор классов по модулю. Затем это число разбивается на блоки сообщения, каждый из которых является натуральным числом, не превышающим n . При выборе блоков избегаются начальные нули для избежания двусмысленностей при расшифровке.

Для дешифровки сообщения, зашифрованного с использованием системы шифрования RSA, сначала получают последовательность блоков, которые затем объединяются, образуя числовое представление исходного сообщения. Только после замены чисел на буквы, согласно таблице, возможно прочтение исходного сообщения [2].

Атаки на RSA могут быть следующими: атаки на ключ, сообщение или саму криптосистему. Важно при выборе факторов следовать требованиям:

1. числа p и q не должны иметь примерно одинаковую длину;
2. числа p и q не должны быть близкими друг другу;
3. числа p и q не должны быть слишком малы.

Стандарт шифрования **AES (Advanced Encryption Standard)** определяет криптографический алгоритм, одобренный Федеральным институтом стандартов США (FIPS), который может использоваться для защиты электронных данных. Алгоритм AES представляет собой симметричный блочный шифр, который может шифровать и расшифровывать информацию. AES использует ключи размером 128, 192 и 256 бит. В зависимости от размера ключа, конкретный вариант алгоритма AES может обозначаться как AES-128, AES-192 и AES-256 соответственно.

AES представляет собой итерационный шифр, число раундов N_r которого зависит от длины ключа (рис. 1).

Длина ключа K	Число раундов N_r
128 бит	10
192 бита	12
256 бит	14

Рис. 1. Число раундов AES в зависимости от длины ключа

В целом алгоритм AES представляет собой следующую последовательность действий:

1. Для заданного исходного текста X инициализируется переменная $State=x$ и производится операция *AddRoundKey*, которая пред-

ставляет собой сложение по модулю 2 (*XOR*) ключа раунда *RoundKey* и *State*.

2. Для каждого из первых $N_r - 1$ раундов:

а) выполняется перестановка *SubBytes* состояния *State*, используя S-боксы;

б) выполняется перестановка *ShiftRows* переменной *State*;

в) выполняется операция *MixColumns* над переменной *State*;

г) снова выполняется операция *AddRoundKey*.

3. В последнем раунде:

а) выполняется *SubBytes*;

б) выполняется *ShiftRows*;

в) выполняется *AddRoundKey*.

4. Шифротекст y определяется переменной $State: y = State$ [3].

AES считается надежным и безопасным алгоритмом. Устойчивость AES к атакам обеспечивается не только его сложностью, но и тщательным выбором математических операций, применяемых в его структуре. Большое внимание уделяется безопасности ключей и процессам их генерации и обработки. Однако, как и в случае с любым криптографическим алгоритмом, безопасность AES может быть подвергнута риску, если ключи выбраны слабыми или если используется неправильный режим шифрования.

Шифр Шамира (схема разделения секрета Шамира) – это метод разделения секретной информации, разработанный криптографом Ади Шамиром в 1979 году.

Основная идея заключается в разбиении секрета на несколько частей, называемых секретными частями. Каждая из них представляет собой точку на графике, и для восстановления секрета необходимо иметь определенное количество таких точек.

Процесс разделения секрета включает выбор секретного значения, порогового значения, поля для вычислений, генерацию случайных коэффициентов для построения полинома и использование полинома для вычисления секретных частей.

Для восстановления секрета требуется минимальное количество секретных частей, которые используются в интерполяции Лагранжа для восстановления исходного полинома и вычисления секретного значения [4].

Пусть нужно разделить секрет M между n сторонами таким образом, чтобы любые k участников могли бы восстановить секрет ($(k - n)$ – пороговая схема).

Выберем простое число $p > M$, которое будет задавать конечное поле размера p . Над этим полем строится многочлен порядка $k - 1$:

$$F(x) = (a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \dots + a_1x + M) \bmod p.$$

Далее нам необходимо сгенерировать n долей секрета. Для этого воспользуемся формулой:

$$k_1 = F(1) = (a_{k-1} \cdot 1^{k-1} + a_{k-2} \cdot 1^{k-2} + \dots + a_1 \cdot 1 + M) \bmod p$$

$$k_2 = F(2) = (a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_{k-2} \cdot 2^{k-2} + \dots + a_1 \cdot 2 + M) \bmod p$$

...

$$k_i = F(i) = (a_{k-1} \cdot i^{k-1} + a_{k-2} \cdot i^{k-2} + \dots + a_1 \cdot i + M) \bmod p$$

...

$$k_n = F(n) = (a_{k-1} \cdot n^{k-1} + a_{k-2} \cdot n^{k-2} + \dots + a_1 \cdot n + M) \bmod p$$

Каждый участник получает пару (k, i) , а также число p . Восстановить секрет можно при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа (формула ниже).

$$F(x) = \sum_i l_i(x) y_i \bmod p$$

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \bmod p$$

Преимущество шифра Шамира – возможность деления секрета на части, что повышает безопасность. Однако его недостатки включают необходимость наличия минимального количества частей для восстановления.

Рассмотренные криптографические алгоритмы предполагается реализовать с применением функциональных графов в качестве основной математической структуры. Такие графы представляют собой хороший инструмент для моделирования и удобного анализа сложных систем.

Список литературы

1. Гатченко Н. А., Исаев А. С., Яковлев А. Д. Криптографическая защита информации : учеб. пособие. СПб. : НИУ ИТМО, 2012. 142 с.
2. Коутинхо С. Введение в теорию чисел. Алгоритм RSA : пер. с англ. М. : Постмаркет, 2001. 328 с.
3. Пономарчук Ю. В., Ещенко Р. А., Фалеева Е. В. Основы анализа шифров классической криптографии : учеб. пособие. Хабаровск : ДВГУПС, 2019. 113 с.
4. Шифр Шамира: простое объяснение, определения и свойства // Научные Статьи.ру – Портал научных статей студентов и аспирантов. URL: <https://nauchniestati.ru/spravka/shifr-shamira/> (дата обращения: 20.04.2024).

НЕЧЕТКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В СИСТЕМАХ С ВОЗОБНОВЛЯЕМОЙ ЭНЕРГИЕЙ: ИНТЕРВАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Владимир Ринатович Гильмутдинов¹,
Денис Николаевич Сидоров²

^{1,2}Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

¹gilmutdinovvr@ex.istu.edu, ²sidorovdn@istu.edu

Аннотация. Исследуется электроэнергетика, фокусируясь на управлении накопителями энергии и прогнозировании потребления. Создан интервальный прогноз на основе измеренного напряжения с последующей интеграцией в модель накопителей энергии. Разработан алгоритм на Python с использованием TensorFlow/Keras для оптимизации модели и прогнозирования энергии.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, нечеткая логика, интервальный прогноз, электроэнергетические системы, накопители энергии

FUZZY INTEGRAL VOLTERRA EQUATIONS IN RENEWABLE ENERGY SYSTEMS: INTERVAL FORECASTING

Vladimir R. Gilmutdnov¹, Denis N. Sidorov²

^{1,2}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

¹gilmutdinovvr@ex.istu.edu, ²sidorovdn@istu.edu

Abstract. The work examines the electricity industry, focusing on energy storage management and consumption forecasting. An interval forecast was created based on the measured voltage with subsequent integration into the energy storage model. Developed an algorithm in Python using TensorFlow/Keras for model optimization and energy prediction.

Keywords: Volterra integral equations, fuzzy logic, interval forecast, electric power systems, energy storage devices

Электроэнергетика является важнейшей областью, которая обеспечивает электрической энергией различные сферы жизни современного человека. Изучив особенности электроэнергетических систем, а также управление накопителями энергии, получится обеспечить должное

обоснование необходимости модернизации устаревшего оборудования и понять пути прогнозирования потребления электроэнергии.

Для наибольшей эффективности генерации энергии, необходимо не только изучение теории, но и поддержание баланса между потребляемой и вырабатываемой энергией, ведь при его отсутствие возможна нехватка электроэнергии для конечного потребителя или ее переизбыток в накопителях. Этот процесс усложняется неравномерностью потребления электроэнергии, который обусловлен множеством факторов, таких как: погодные условия, географическое расположение конечного потребителя, типа населения в этой области, качества используемого полотна и другого оборудования, а также времени года и множества других, влияющих не так сильно, как вышеизложенные. С примером неравномерности потребления электроэнергии можно ознакомиться на рисунке 1 [1].

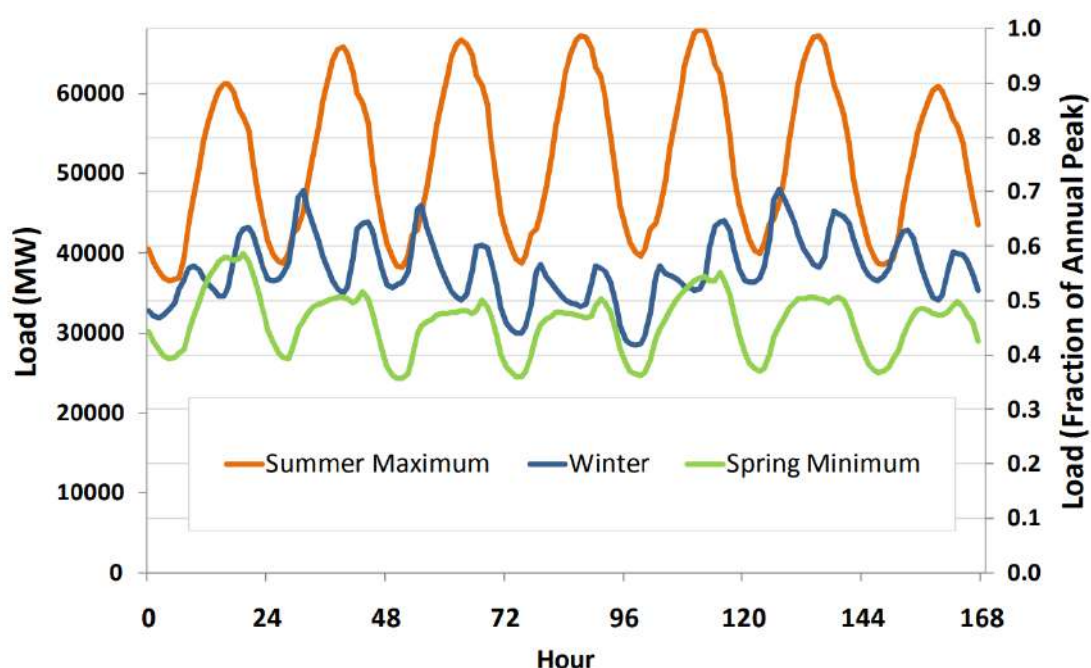


Рис. 1. Потребление электроэнергии в Техасе

Целью данной работы было создание интервального прогноза на основе измеренного напряжения на выходе одного из накопителей. Дальнейшие шаги включают в себя интеграцию разработанного интервального прогноза в модель накопителей энергии и проведение комплексного анализа работы системы в различных условиях эксплуатации.

В процессе исследования был разработан и реализован на языке Python алгоритм, который включает в себя чтение данных из файла, разделение на тренировочный и тестовый наборы, нормализацию признаков, построение и обучение модели нейронной сети с исполь-

зованием TensorFlow/Keras. Для повышения эффективности модели был проведен поиск оптимального значения скорости обучения с последующим выбором лучшей модели.

Для прогнозирования использовались данные, собранные с накопителя в течение трех месяцев с интервалом в 5 минут. Основная часть этой информации была использована для обучения модели, в то время как последние 5 дней были зарезервированы для проверки точности прогнозирования. Этот подход позволяет модели учиться на исторических данных и затем проверять её способность предсказывать будущие события на новых данных, что помогает оценить её эффективность и точность.

Запустив реализованный алгоритм, мы получаем график (рис. 2), на котором отображаются реальные данные, взятые из файла со входными данными, на основе которых и была построена модель, прогнозируемые данные, которые представляют собой результат работы алгоритма, а также доверительный интервал, диапазон значений, в пределах которого, будут находиться будущие наблюдения, верхнее и нижнее значение этого интервала будут интегрированы в модель с применением метода продолжения по параметру и интегральных уравнений Вольтерра для дальнейших исследований.

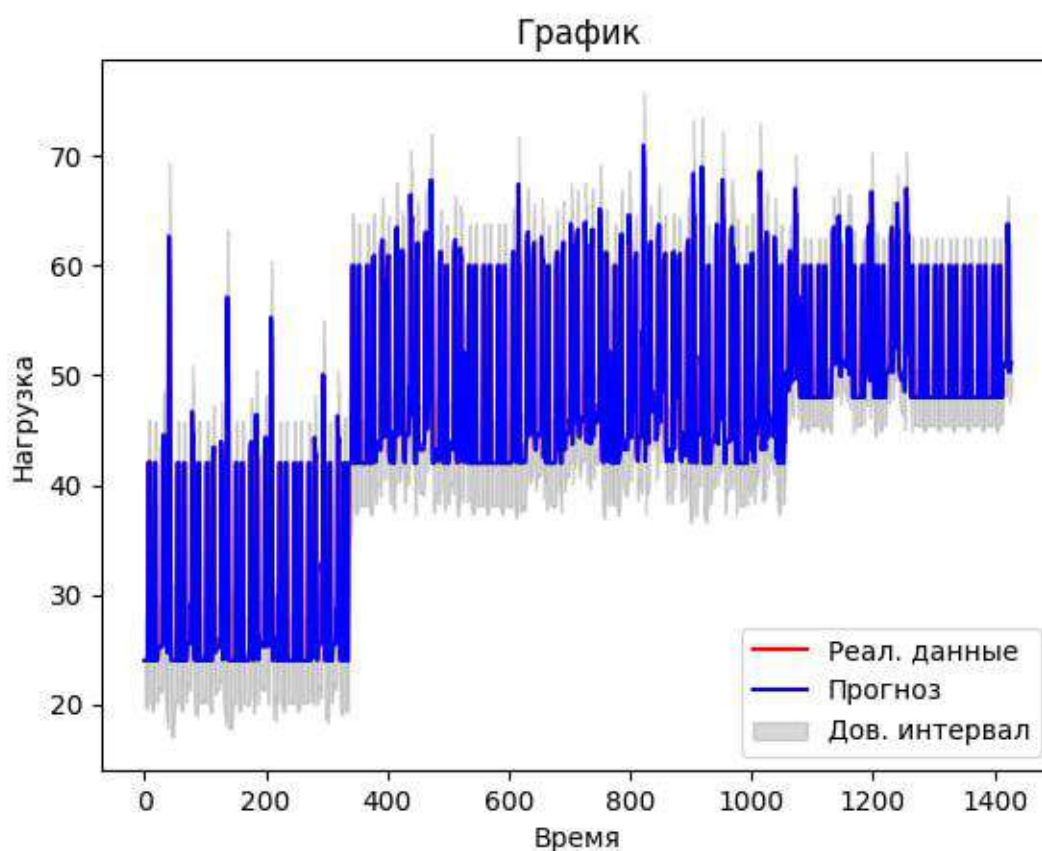


Рис. 2. Визуализация результата прогнозирования

Результаты прогнозирования также записываются в файл (рис. 3), откуда уже в будущем они будут интегрироваться в модель с использованием интегральных уравнений Вольтерра.

```
Lower Bound, Upper Bound
20.696953466552117, 27.303019830567024
19.902386895327442, 28.097590216488964
19.534901049432584, 28.465076062383822
19.662712472001637, 28.33726463981477
19.801338621863003, 28.19864230465067
19.915528714969454, 28.084448396846952
38.02402905261389, 45.97592517101892
38.21707385394034, 45.96413952496591
38.22251361224112, 45.96957928326669
20.22285071284183, 27.969917384082
20.354120889903278, 28.872586568592816
19.48681723281334, 28.513159879003066
19.343037884247263, 28.656939227569143
19.343037884247263, 28.656939227569143
19.486817732920642, 28.513159378895764
19.746123961407353, 28.253849335711788
38.15944635706229, 45.84050786657052
38.17864829081038, 45.821313562216964
38.18838631627281, 45.81156790736
20.210564673324164, 27.789416253189508
20.233340903136842, 27.766636208679564
```

Рис. 3. Фрагмент файла с результатами

Список литературы

1. Denholm P., Ela E., Kirby B., Milligan M. The Role of Energy Storage with Renewable Electricity Generation / Rep. National Renewable Energy Laboratory. Technical Report NREL/TP6A2-47187. Executor : Colorado, 2010. January. 61 p.

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОСПРИЯТИЯ МЕЛОДИИ ЧЕЛОВЕКОМ

Наталья Юрьевна Скибицкая¹,
Егор Сергеевич Хохлов²,
Иван Андреевич Мартынов³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹natalia.skibitskaya@yandex.ru, ²khokhlov12378@gmail.com,

³ivanmartynov123456@gmail.com

Аннотация. Музыка оказывает глубокое воздействие на человека. Она может вызывать различные эмоции, влиять на настроение, поведение и даже физиологические процессы в организме. Представлена разработка математической модели, которая исследует факторы, влияющие на восприятие мелодии человеком. Модель поможет выявить факторы, влияющие на внимание людей к мелодии, а также предложить методы изучения музыкальных композиций.

Ключевые слова: восприятие мелодии, математическая модель, факторы, анализ, задача Коши

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL OF HUMAN PERCEPTION OF MELODY

Natalia Yu. Skibitskaya¹, Egor S. Khokhlov², Ivan A. Martynov³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹natalia.skibitskaya@yandex.ru, ²khokhlov12378@gmail.com,

³ivanmartynov123456@gmail.com

Abstract. Music has a profound effect on a person. It can cause various emotions, influence mood, behavior and even physiological processes in the body. The article is devoted to the development of a mathematical model that explores the factors influencing the perception of a melody by a person. The model will help identify factors influencing people's attention to melody, as well as suggest methods for studying musical compositions.

Keywords: melody perception, mathematical model, factors, analysis, Cauchy problem

Музыка – это уникальное явление, способное вызывать в нас самые разнообразные эмоции и переживания. Основная загадка музыки состоит в том как она захватывает наше внимание. Цель данного

исследования состоит в построении математической модели, которая поможет нам лучше понять как наше сознание и подсознание реагируют на звуки и ритмы.

Для создания математической модели восприятия монохроматического звукового импульса рассматривается параметрическое линейное пространство R^n , по которому распределено внимание испытуемого. С течением времени это распределение постоянно меняется. При изучении восприятия рассматриваемое пространство считается двумерным ($\omega = R^2$), где в качестве измерений применяется ось высоты звука μ и отклонение звуковой волны в горизонтальной плоскости, которое считается постоянным ($\eta = const$).

Процесс изменения плотности внимания $P(x, t)$, рассматривается следующей задачей Коши:

$$P_t = -\frac{\alpha \Delta P}{\varphi^2 t^2} + k(\varphi) \alpha^{-2} t \Delta P, t \in (0, +\infty), x \in R^2, \quad (1)$$

$$P_{k=0} \in (x, +\infty) = \delta(x), \quad (2)$$

где $x \in R^2$ – точка пространства ω , t – время, коэффициент $k(\varphi)$ находится из некоторого трансцендентного уравнения. Уравнение (1) имеет форму параболического типа с переменным знаком коэффициента. Однако благодаря особенностям зависимости этого коэффициента от времени и формы дополнительного («целевого») условия (2), решение задачи (1), (2) остается устойчивым, и ее можно успешно решить с применением обычных аналитических методов, таких как метод Фурье.

При многократном повторении одного и того же раздражителя происходит привыкание и человек перестает его замечать. Согласно теории Е. Н. Соколова угашение и восстановление реакций являются результатом активации и ингибирования нейронных цепей в мозге. Угашение реакции происходит, когда стимул повторяется несколько раз подряд. В этом случае, нейроны, ответственные за реакцию на этот стимул, начинают уставать и теряют свою активность. В результате угашения, реакция на стимул становится слабее или полностью исчезает. Мелодия на одной ноте при повторении приводит сначала к усилению возбуждению однако со временем реакция угасает. При этом если мелодия состоит из разных звуков механизм угашения не срабатывает и общее возбуждение растет.

Музыкальный звук представляет собой набор звуков определенной частоты и его обертоны. Обертоны – это дополнительные частоты, которые возникают вместе с основной частотой звука, формирующиеся из-за сложных резонансов внутри источника звука, например струны, колокола или губной гармошки. Каждый инструмент или голос имеет свою уникальную комбинацию обертонов, которые определяют его

тембр и характер звучания. Например, скрипка может иметь более яркий и насыщенный звук благодаря наличию богатого спектра обертонов. Обертоны вызывают возбуждение в множестве точек $x_{ji} = (\mu_{ji}, \eta)$, при этом обертоны выше основного звука. Так нота “ре” первой октавы имеет обертоны “ля” и “до” второй октавы. Так как человеческое ухо воспринимает частоты в диапазоне от 20 до 20000 Гц и является наиболее воиспривимчивым на диапазоне от 2 – 5 КГц множество обертонов считаются конечным. На рисунке 1 представлен процесс возникновения обертонов в струне.

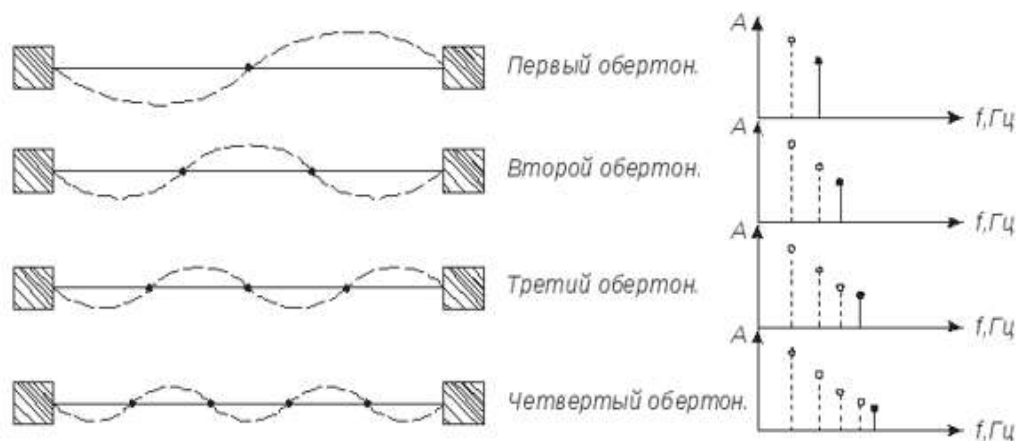


Рис. 1. Процесс возникновения обертонов в струне

Музыкальную мелодию M можно рассматривать как последовательность N монохроматических звуковых импульсов с частотами ν_j и громкостью ϕ_j , предъявляемых в моменты времени $j t, j=1, \dots, N$, т.е. как динамическую последовательность. Восприятие громкости звука человеком в зависимости от частоты представленно на рисунке 2.

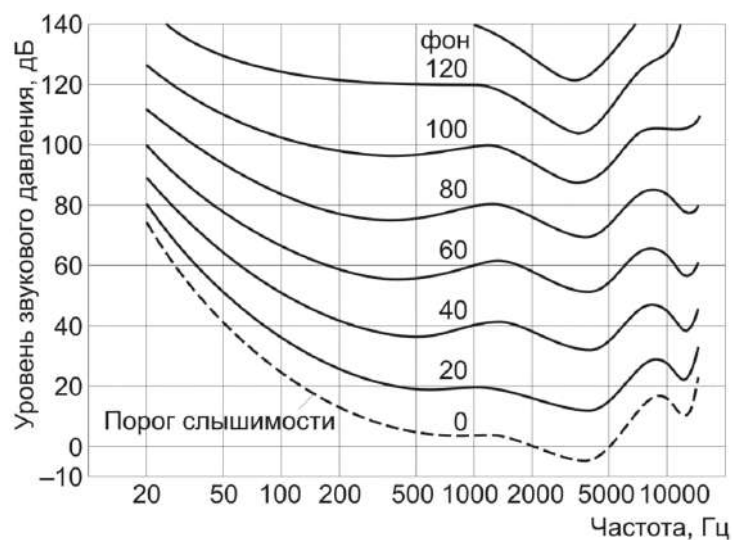


Рис. 2. Громкость звука и частота

$$M = \{(t_j, v_j, \varphi_j) | j = 1, \dots, N\}. \quad (3)$$

Громкость отдельных звуков мелодии будем считать одинаковыми. Звук проецируется в точку x_j . Тогда восприятие отдельных звуков описывается уравнениями

$$P_t = -\frac{\alpha \Delta P_j}{\varphi^2(t-t_j)} + k(\varphi) \alpha^{-2} (t-t_j) \Delta P_j. \quad (4)$$

С целевыми условиями:

$$P_{t,k=0} = (x, +\infty) = \delta(x - x_j). \quad (5)$$

Моментальный интерес к мелодии определяется как максимальная концентрация внимания в данное время:

$$P_m(t) = P(x_m, t) = \sup_{x \in \omega} P(x, t). \quad (6)$$

Определим критерий качества мелодии как средний уровень интереса слушателя к мелодии на протяжении всего времени ее звучания T :

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T P_m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (P(x_m(t), t) dt. \quad (7)$$

Таблица 1

**Процентное соотношение уровней психологического
внимания человека с частотой звука**

Частоты (Гц)	Процентное соотношение
Низкие (ниже 20)	10 %
Средние (20–2000)	70 %
Высокие (выше 2000)	20 %

Таблица 2

**Процентное соотношение уровней психологического
внимания человека с громкостью звука**

Громкость (ДБ)	Процентное соотношение
Тихие звуки (менее 60)	10–20 %
Средняя громкость (60–80)	70–80 %
Громкие звуки (80 и выше)	10–20 %

Зависимость внимания человека от громкости звука и частоты представлено в таблицах 1 и 2. Процентные соотношения могут незначительно варьироваться в зависимости от индивидуальных особенностей человека и контекста восприятия. Когда испытуемый оценивает силу раздражителя по предложенной шкале, он не ориентируется на показания прибора, который измеряет громкость звука или яркость света, а на силу впечатления, которое он получает от этого раздражителя. Для простых раздражителей, таких как звуковой импульс или вспышка света, сила впечатления зависит от интенсивности раздражителя и служит адекватной мерой его силы. В более общем случае сила впечатления определяется эмоциональным и смысловым содержанием раздражителя.

Таким образом, данные модели позволяют оценивать качество мелодии и сравнивать различные музыкальные композиции по способности удерживать внимание слушателя и производить на него впечатление. Определение критерия качества позволяет формулировать задачу оптимизации мелодии, то есть поиска наилучших музыкальных композиций. Эта задача связана с поиском экстремумов функции Q , зависящей от параметров, характеризующих мелодию, включая частоты звуков и моменты времени их звучания. Для более глубокого понимания восприятия мелодии и его моделирования важно учитывать не только физические параметры звукового сигнала, но и психоакустические особенности восприятия звука человеком. Исследования в этом направлении могут принести новые знания о том, как музыка воздействует на наше сознание и эмоции [1–4].

Список литературы

1. Карелина Н. С. Психоакустические особенности перцепции музыкальных произведений // Психоакустика. 2019. Т. 4, № 2.
2. Рязанова И. П. Построение и анализ восприятия музыкальной мелодии в контексте психологии звука // Психология звука. 2020. Т. 7, № 4.
3. Гласко А. В. О восприятии музыкальной мелодии // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2008. № 15 (2). С. 278–279.
4. Евин И. А. Что такое искусство с точки зрения физики? М. : Воентехиздат, 2000. 144 с.

ОБ УСПЕШНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ТРИСЕКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

Сергей Леонидович Михайлов

Заречный Пензенской области, Россия
smthrsol@internet.ru

Аннотация. Получено геометрическое построение в площади произвольного равнобедренного треугольника, создающее соотношение углов 1:3, что позволяет получать трисекцию произвольного острого угла циркулем и линейкой без делений.

Ключевые слова: трисекция произвольного угла, равнобедренный треугольник, соотношение углов 1:3

ABOUT THE SUCCESSFUL GEOMETRICALLY CONSTRUCTIONS IN TO THE THREE-SECTION PROBLEM TASK

Sergey L. Mikhailov

Zarechny, Penza region, Russia
smthrsol@internet.ru

Abstract. Author present hear the geometrically constructions in to the area of the isosceles triangle, which generate apply to 1:3 for angles there exactly.

Keywords: three-section of the arbitrary angle, isosceles triangle, apply to 1:3 for angles there exactly

Завершая свои более чем трёхлетние «упражнения» в неразрешимой задаче трисекции произвольного угла, автор осмеливается здесь и всё же считает для себя возможным поделиться некоторыми итогами с данным уважаемым сообществом. Поставим для начала простой уточняющий вопрос: «Возможно ли геометрическое построение циркулем и линейкой без делений, в котором есть два угла, связанных прямо или косвенно соотношением своих величин как 1:3 в точности?». Сектор круга в $\frac{3}{2}$ некоторого угла мы не берём – он бесперспективен, очевидно.

Пусть нам дан некоторый произвольный равнобедренный треугольник $\triangle BFC$ с острым вершинным углом $\angle BFC = 2\theta$ и основанием BC – рис. 1.

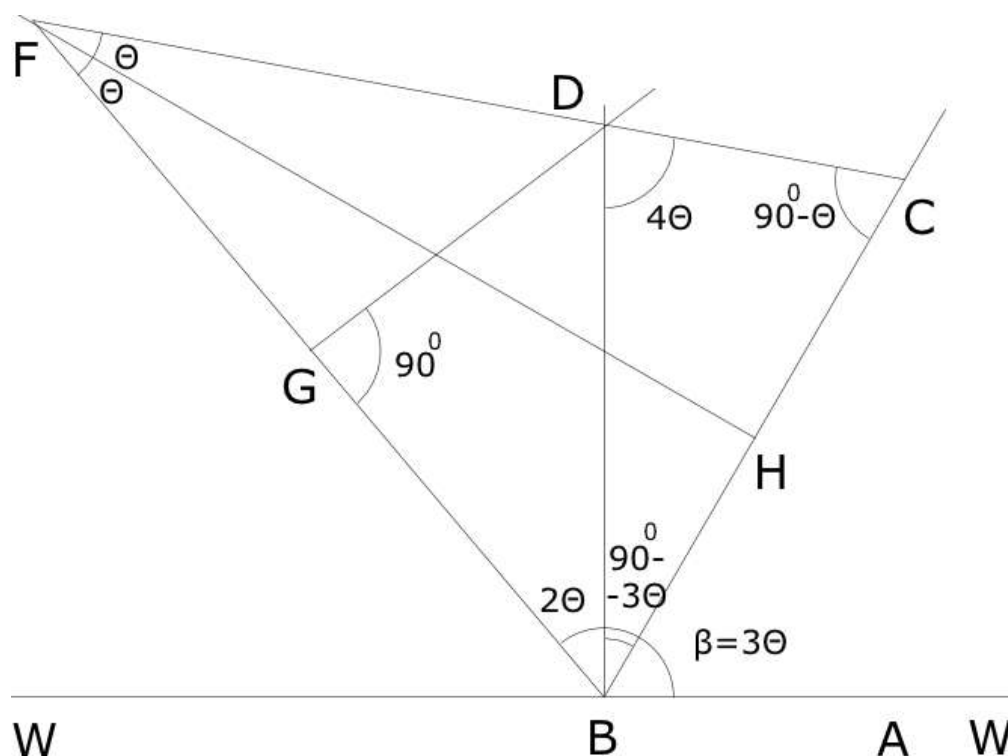


Рис. 1

Геометрическое построение, создающее углы, связанные между собою соотношением 1:3. Угол $\angle BFH = \angle ABC/3$ соответственно. Угол $\angle ABC = 60^\circ$, угол $\angle BFH = 20^\circ$, что успешно опровергает «абсолютную невозможность деления угла в 60° на три» кстати. Выполнено в полуручном режиме и не предназначено для точных измерений здесь.

Разделим боковую сторону BF пополам и из этой точки G восставим перпендикуляр до стороны BC – точка D там и построим равнобедренный треугольник $\triangle BDF$ с основанием BF и углами при нём равными 2θ соответственно. Исполнение элементов геометрических построений – [1] IV.А. Этим образован и треугольник $\triangle BDC$, с углом $\angle BDC = 4\theta$ как внешним к треугольнику $\triangle BDF$ и с углом $\angle BCD = 90^\circ - \theta$ в нём. Его третий угол $\angle DBC$ будет равен: $180^\circ - 4\theta - (90^\circ - \theta) = 90^\circ - 3\theta$. Если $3\theta = \beta$, то можно создать алгоритм точного решения трисекции β - угла (β - трисекции) геометрическим построением. Чтобы верно разместить угол β , построим перпендикуляр к BD из B – прямая WW и угол $\angle DBW = 90^\circ$. Затем из вершины B и от прямой WW строим угол β , получая второй его луч BC и сам угол $\angle WBC = \beta = \angle ABC$.

В частности, если $BC = BD$ – рис. 1, мы получаем тест для $\beta = 54^\circ$, так как тогда $\triangle BDC$ равнобедренный и потому углы при его основании DC равны: $90^\circ - \theta = 4\theta$, $5\theta = 90^\circ$, $\theta = 18^\circ$, $3\theta = 54^\circ = \beta$ соответственно тогда. Геометрическое построение начинается с прямого угла $\angle DBA$ (рис. 1), в составе которого $\angle ABC = \beta = 54^\circ$ и $\angle DBC = 36^\circ$. Фиксируем

точку С, получая отрезок ВС, и откладываем его по DC лучу, фиксируя D. Соединяя D с С, получим луч-отрезок DC, а построив перпендикуляр из С во вне, получим луч CC^* и этим $\angle DCC^* = \theta = 18^\circ$ тогда, что и решает точную β -трисекцию угла 54° прямым геометрическим построением. Если же теперь угол $\angle BDC = 4\theta = 90^\circ$, $\theta = 22.5^\circ$, $3\theta = 67.5^\circ = \beta$, то мы получаем ещё один аналогичный результат. Наверное, и продолжения тоже возможны. Это доказательно создаёт углы-исключения помимо угла 90° , опровергающих собою «неразрешимость» трисекции углом посредством соответствующих геометрических построений циркулем и линейкой без делений. Реально этим мы имеем целое множество таких углов: $54^\circ \cdot 2 = 108^\circ$, $54^\circ / 2 = 27^\circ$, $54^\circ / 4 = 13.5^\circ$, $90^\circ / 2 = 45^\circ$, $90^\circ / 4 = 22.5^\circ$, 67.5° , 135° включая их линейные комбинации тоже.

Теперь рассмотрим другой алгоритм, позволяющий решать трисекцию произвольного острого угла в некотором диапазоне углов непосредственно геометрическим построением простым циркулем и линейкой без делений.

1. Пусть нам дан некоторый острый угол $\angle ABD = \beta = \alpha/2$, $\alpha = \angle ABC$ – рис. 2.

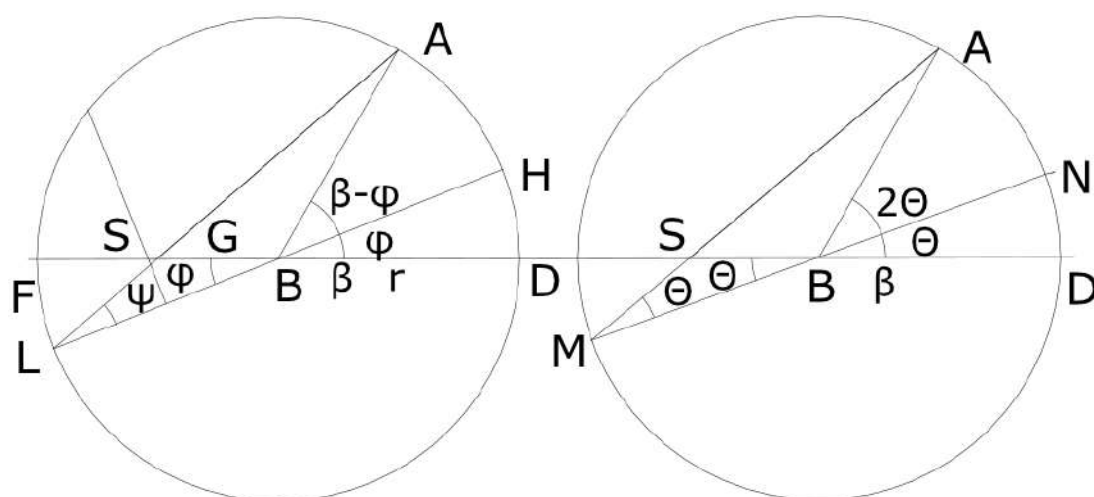


Рис. 2

Способ решения трисекции острого угла $\angle ABD = \beta = 60^\circ$ геометрическим построением за 10 шагов. Слева первый, подготовительный этап. Справа итоговое построение решения: угол $\angle SMB = \theta = \angle MBS = \angle NBD = 20^\circ$, $\angle ABN = 2\theta = 40^\circ$. Выполнено в полу-ручном режиме и не предназначено для точных измерений здесь.

2. Из вершины В как центра построим окружность некоторого произвольного радиуса r , квантор $((r - B))$, фиксируя точки её пересечения с лучами угла как А и D соответственно.

3. Продолжим BD луч за вершину B влево на величину отрезка r – так получая точку F на $((r - B))$.

4. Делим отрезок FB пополам – точка G , и соединяя её с A прямой линией, получим точку L на $((r - B))$ левее и ниже точки G и хорду AL в итоге.

5. Соединяем L с B и получаем этим $\triangle BLG$ с острыми углами $\varphi = \angle GBL$ и $\psi = \angle GLB$ соответственно.

6. Продолжая сторону LB за вершину B по прямой, получим на окружности $((r - B))$ точку H и центральные углы $\angle HBD = \varphi = \angle GBL$ и $\angle ABH = \beta - \varphi$ соответственно. Углы $\angle HBD$ и $\angle GBL$ равны как вертикальные [1] IV.Б.5.

7. Заметим, что был создан также $\angle ALH = \psi$ как вписанный и опирающийся на дугу $\widehat{AH}$, противолежащую ему и потому измеряемую 2ψ дуговых градусов [1] IV.Б.15,16. Дуга $\widehat{HD}$ измеряется величиной φ соответственно.

8. Но центральный угол $\angle ABH = \beta - \varphi$ опирается на ту же дугу $\widehat{AH}$, и потому имеем $\beta - \varphi = 2\psi$, $\beta = \varphi + 2\psi$.

9. Если мы сможем скорректировать часть нашего построения в объёме п. 4–6 так, чтобы углы φ и ψ стали равны между собой $\varphi = \psi = \theta$, то получим $\beta = 3\theta$, что нам и нужно для решения задачи β -трисекции.

10. Для этого перестроим треугольник $\triangle BLG$ в равнобедренный. Из середины основания LB проводим перпендикуляр до FB – точка S рис. 2 слева, и далее действуем аналогично п. 4–6. В итоге вместо треугольника $\triangle BLG$ теперь мы построим равнобедренный треугольник $\triangle MSB$ с θ - углами при основании $MB = r$. Естественно, что положение точки G изменится на положение точки S притом и хорда AL заменяется хордой AM – рис. 2 справа.

11. Хорда LN заменяется построением хордой MN и угол $\angle ABD$ разделяется ею на углы $\angle ABN$ и $\angle NBD = \theta$. Угол $\angle AMN = \theta$ как вписанный, опирается на дугу $\widehat{AN} = 2\theta$ и потому соответствующий центральный угол $\angle ABN = 2\theta$.

12. Это и означает, что угол $\beta = \theta + 2\theta = 3\theta$, что и требовалось нам получить нашим построением. Так как $\beta = \alpha/2$, то этим решается также и α - трисекция, и потому $\alpha/3 = 2\theta$ соответственно.

13. Данный алгоритм был успешно тестирован автором в диапазоне острых углов $48-72^\circ$ с получением точных результатов. Возможно, что углы иных величин сначала следует преобразовать к углам этого диапазона, но этот вопрос находится сейчас под дополнительным изучением.

14. Автором также были созданы ещё два алгоритма, позволяющие за 1–3 юстировки получать трисекцию острого угла с погрешностью не свыше 0.3° , но там нет гарантии точного решения как в представленном алгоритме выше и потому они здесь не рассматриваются.

15. Идеи всех этих алгоритмов созданы автором исключительно лично, также, как и вся работа выполнялась автором полностью самостоятельно и по своей собственной инициативе. Никаких обсуждений, советов, совещаний, консультаций и т.п. общения с кем-либо вообще по теме этой теме мною никогда и нигде не проводилось совершенно. Авторское право было мною зафиксировано за собою полностью и заранее. Применение этих алгоритмов в системах компьютерной графики возможно только после приобретения лицензии от автора.

Дополнение. Автором буквально на днях самостоятельно получен новый интересный вариант – рис. 3 – который не требует никаких априорных или дополнительных построений, или юстировок и т.п.

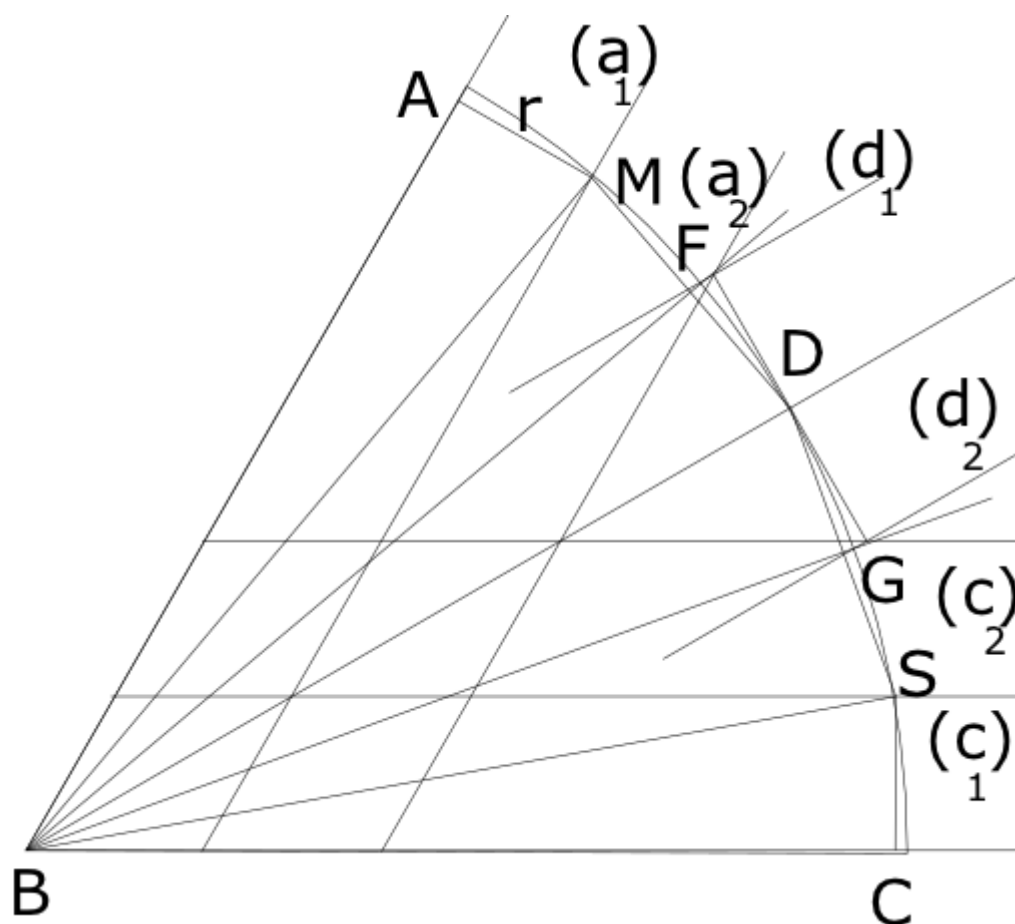


Рис. 3

Успешное деление «совершенно неразрешимого натрое угла 60° » посредством метода «г-полос» не только на три, но и на 6 равных частей.

Выполнено в полу – ручном режиме с использованием комплекса программ Inscare (бесплатная версия). Величины полученных в итоге 6 равных углов – лучей, следующих вверх от луча BC исходного угла $\angle ABC = 60.01^\circ$ – согласно строке – комментарию Inscare – соответст-

венно: 1) 10.03° ; 2) 19.98° ; 3) 30.06° ; 4) 39.93° ; 5) 49.98° ; 6) 60.01° . Как видим, максимальное отклонение здесь не превышает 0.06° !

1. Имея исходный угол $\angle ABC$, возьмём произвольный небольшой отрезок длины r , и в площади нашего угла построим прямые, параллельные лучам угла и его биссектрисе, отстоящие от них на величину r .

2. Далее для краткости они называются « r -полоса».

3. Аналогично вдоль лучей угла строим ещё по r – полосе от предыдущих и получим там по две равных полосы (на рис. 3 полосы (a2) и (c2) соответственно).

4. В пересечении полос имеем точки F и G соответственно. Соединяя их отрезком прямой, фиксируем середину отрезка FG – и точку D этим также.

5. Из D проводим $2r$ - дуги до пересечения с полосами (a1) и (c1) этим образуя точки M и S и отрезки $MD = 2r = SD$, BM и BS и углы: $\angle ABM = \angle SBC = \angle ABC/6$.

6. Разделив MD и SD пополам, получим ещё два луча двух углов и этим в итоге завершая деление угла $\angle ABC$ на 6 равных частей.

7. Дуга $\widehat{BD}(B)$, соединяя лучи исходного угла, подтверждает наше построение.

8. Этот алгоритм был успешно протестирован автором на множестве углов в диапазоне 48–84 градуса с аналогичными результатами.

9. Авторское право было зафиксировано автором полностью за собою заранее.

Список литературы

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. 23-е изд. М. : Наука, 1974. 416 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МДО-ПРОЦЕССА

**Андрей Анатольевич Максов¹,
Екатерина Анатольевна Печерская²,
Анатолий Дмитриевич Семенов³,
Павел Евгеньевич Голубков⁴,
Ульяна Сергеевна Чихрина⁵,
Кирилл Романович Буренин⁶**

^{1,2,3,4,5,6}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹maksov.01@mail.ru, ²pea1@list.ru,
³ad-semenov@mail.ru, ⁴golpavpnz@yandex.ru,
⁵chikhulyana@yandex.ru, ⁶kirillburenin78@gmail.com

Аннотация. Проведено математическое моделирование вольт-амперных характеристик на основе анализа известной эквивалентной электрической схемы замещения процесса микродугового оксидирования. Получена ее линеаризованная модель в пространстве состояний, связывающая через параметры модели входное напряжение гальванической ячейки с током, протекающим через нее. В целях исследования проведена параметрическая идентификация модели МДО-процесса, по результатам которой в программной среде MatLAB разработана нелинейная Simulink-модель процесса. Максимальная ошибка моделирования напряжения и тока по отношению к их максимальным значениям не превышает 7 и 10 % соответственно. Получены зависимости изменения параметров модели от длительности процесса с применением разработанной методики параметрической идентификации. Установлено, что изменение сопротивления покрытия детали R_2 зависит от толщины наращиваемого покрытия. Полученные результаты можно использовать при разработке цифрового двойника процесса микродугового оксидирования.

Ключевые слова: микродуговое оксидирование, математическая модель, толщина, схема замещения, погрешность, параметрическая идентификация

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, проект «Фундаментальные основы цифрового двойника технологического процесса формирования оксидных покрытий с заданными свойствами методом микродугового оксидирования», № 123091800009-1.

MODELING OF VOLT-AMPERE CHARACTERISTICS BASED ON ANALYSIS OF EQUIVALENT ELECTRICAL MODEL OF MDO PROCESS

Andry A. Maksov¹, Ekaterina A. Pecherskaya²,
Anatily D. Semenov³, Pavel E. Golubkov⁴, Ulyana S. Chihrina⁵,
Kirill R. Burenin⁶

^{1,2,3,4,5,6}Penza State University, Penza, Russia

¹maksov.01@mail.ru, ²pea1@list.ru,

³ad-semenov@mail.ru, ⁴golpavpnz@yandex.ru,

⁵chikhulyana@yandex.ru, ⁶kirillburenin78@gmail.com

Abstract. In this work, mathematical modeling of volt-ampere characteristics was carried out on the basis of analysis of the known equivalent electrical substitution diagram of the microarc oxidation process. Its linearized state-space model was obtained, linking through the model parameters the input voltage of the galvanic cell with the current flowing through it. For the purpose of the study, parametric identification of the MDO-process model was carried out, based on the results of which a nonlinear Simulink model of the process was developed in the MatLAB software environment. The maximum modeling error of voltage and current with respect to their maximum values does not exceed 7 and 10 %, respectively. The dependences of the model parameters variation on the process duration were obtained using the developed parametric identification technique. It is established that the change in the resistance of the part coating R_2 depends on the thickness of the build-up coating. The obtained results can be used in the development of a digital twin of the microarc oxidation process.

Keywords: microarc oxidation, mathematical model, thickness, substitution scheme, error, parametric identification

Financing: The work was supported by the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation “Fundamentals of the digital twin of the technological process of forming oxide coatings with specified properties by microarc oxidation” (№ 123091800009-1).

В настоящее время существует тенденция, направленная на создание и внедрение цифровых двойников в различные области жизни и деятельности человека, включая медицину, промышленность, транспорт, образования и др. Кроме этого, согласно Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации [1], одним из таких приоритетных направлений является создание виртуальных фабрик будущего. Такие «умные» фабрики, в свою очередь, должны использовать передовые производственные технологии, основываясь на развитии искусственного интеллекта, робототехники, биотехнологий и др.

Создание новых материалов и разработка интеллектуальных производственных технологий, в том числе создание цифровых двойников [2, 3], является перспективным направлением развития современной промышленности. Одна из таких технологий – микродуговое оксидирование (МДО) – позволяет получать покрытия с высокими эксплуатационными свойствами на изделиях из легких сплавов, применяющиеся в машиностроении, приборостроении, медицины и др.

В данной работе с целью разработки и наполнения цифрового двойника МДО-процесса проводилось моделирование вольт-амперных характеристик.

Для этого, используя приложение MATLAB Control System Toolbox, были рассчитаны временные и частотные характеристики известной эквивалентной электрической схемы замещения [4, 5], а также основные характеристики линеаризованной модели процесса МДО для режимов пробоя покрытия (короткое замыкание) и холостого хода, когда сопротивление покрытия высокое (рис. 1).

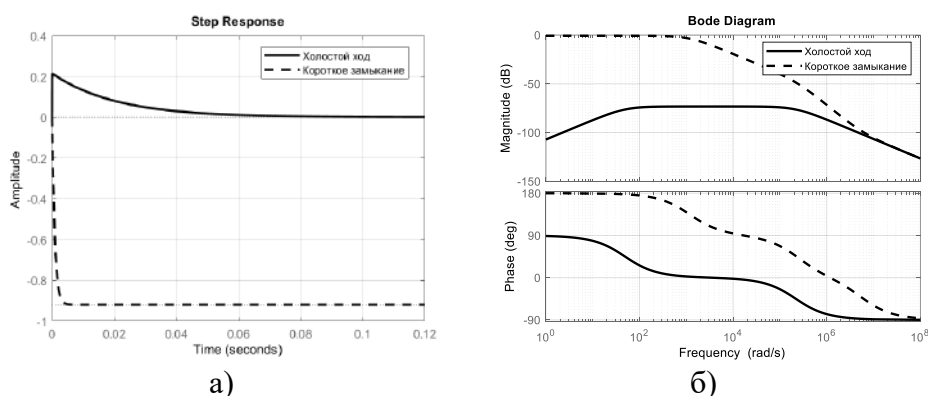


Рис. 1. Временные (а) и частотные характеристики (б) модели процесса МДО

Передаточные функции проводимости по току I_2 имеют вид:

$$W_{i2} = \frac{46,957 \cdot p}{(p + 2,179 \cdot 10^5) \cdot (p + 48,97)}, \quad (1)$$

$$W_{i2k} = \frac{46,957 \cdot (p - 5,639 \cdot 10^6)}{(p + 2,436 \cdot 10^5) \cdot (p + 1182)}, \quad (2)$$

где индексом k обозначена модель короткого замыкания.

Модель устойчива, поскольку корни характеристического уравнения отрицательны. Модель управляема и наблюдаема, поскольку ранги матриц управляемости и наблюдаемости равны порядку системы, однако модель плохо обусловлена, что может привести к существенным ошибкам при её параметрической идентификации. Числа

обусловленности для модели холостого хода R_{xx} и короткого замыкания R_{kz} соответственно равны $R_{xx} = 8410$ и $R_{kz} = 317$. Большое значение числа обусловленности модели говорит о её плохой обусловленности.

Построение математической модели процесса МДО и оценка её параметров, позволяют перейти к моделированию рассматриваемого процесса. Моделирование процесса МДО осуществлялось в Simulink. Simulink-модель процесса показана на рис. 2.

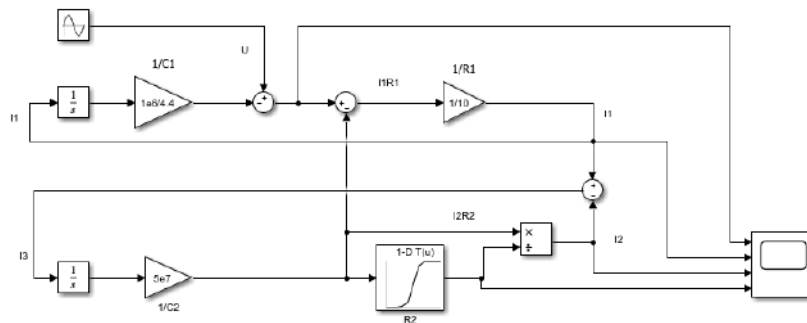


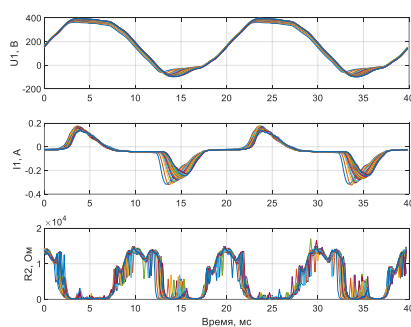
Рис. 2. Simulink-модель процесса МДО

Экспериментальные исследования проводились в следующей последовательности:

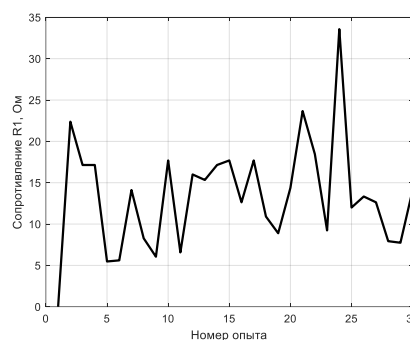
1. В процессе формирования МДО покрытия последовательно через каждую минуту происходит регистрация 30 осциллограмм падения напряжения и тока гальванической ячейки (рис. 3,а).

2. В каждом опыте вычисляют $R_{1i} + R_{2i} = \frac{\Delta U_{1i}}{\Delta I_{1i}}$ и находят оценку

$R_1 = \min(R_{1i} + R_{2i}) \approx 10$ Ом (рис. 3,б).



а)



б)

Рис. 3. а) осциллограммы напряжений, токов и сопротивления гальванической ячейки; б) изменение сопротивления R_1 в каждом опыте

3. Вычисляют мгновенное значение R_2 в каждом опыте (рис. 3,а)

$$R_1 + R_{2i} = \frac{\Delta U_{1i}}{\Delta I_{1i}}. \quad (3)$$

4. Вычисляют среднее за период значение сопротивления R_2 (рис. 4,а).

Так как каждый опыт проводился с интервалом в 1 минуту, то полученная зависимость, приведённая на рис. 4, а, хорошо совпадает с зависимостью толщины покрытия от времени электролиза.

5. В каждом опыте, используя приложение *MATLAB System Identification Toolbox*, вычисляют параметры передаточной функции (4). Результаты расчетов представлены на рис. 4,б.

$$W(p) = \frac{I_1(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2 C_2 p + 1}{R_1 R_2 C_2 p + R_1 + R_2}. \quad (4)$$

6. По формулам (5), принимая $R_2 = 4400$ Ом, вычисляют C_2 , график изменения которой представлен на рис. 4,в.

$$\begin{aligned} T_1 &= R_1 R_2 C_2 = 0,002417 \text{ с} \\ T_2 &= R_2 C_2 = 0,0009829 \text{ с} \end{aligned} \quad (5)$$

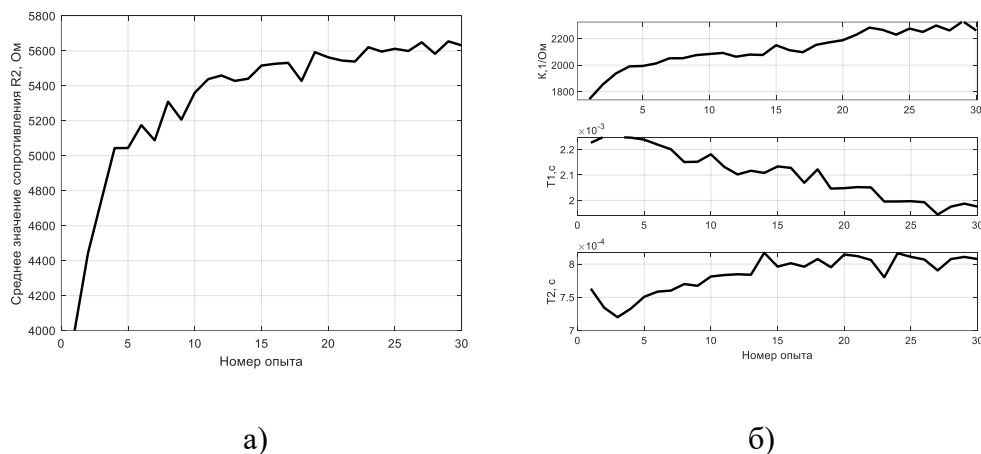


Рис. 4. а) изменение за период среднего значения сопротивления R_2 в каждом опыте; б) изменение коэффициентов передаточной функции проводимости ячейки; в) изменение емкости C_2

Анализ результатов вычисления оценок параметров модели электрической схемы замещения процесса МДО показал, что в процессе наращивания МДО покрытия заметно изменяется только среднее за период питающего напряжения значение сопротивления R_2 . Остальные параметры схемы замещения практически не изменяются.

Таким образом, в ходе работы получены следующие основные результаты.

Задана трехэлементная электрическая схема замещения процесса МДО, получена её линеаризованная модель в пространстве состояний, связывающая через параметры модели входное напряжение гальванической ячейки с током, протекающим через неё.

С использованием приложения *MATLAB System Identification Toolbox* проведена параметрическая идентификация модели процесса МДО, по результатам которой разработана нелинейная Simulink-модель процесса МДО.

Проведена проверка адекватности модели путем равнения расчетных и экспериментальных напряжений и токов гальванической ячейки. Максимальная ошибка моделирования напряжения по отношению к U_{max} не превышает 7 %, максимальная ошибка моделирования тока по отношению к I_{max} не превышает 10 %.

В 30 опытах, проводимых через каждую минуту, осуществлялась регистрация токов и напряжения гальванической ячейки. По полученным экспериментальным данным напряжений и токов на основе разработанной методики параметрической идентификации получены зависимости изменения параметров модели от времени МДО-обработки. Установлено, что изменение сопротивления покрытия детали R_2 зависит от толщины наращиваемого покрытия. Остальные параметры схемы замещения в процессе МДО меняются незначительно [6].

Список литературы

1. О Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации : указ Президента Российской Федерации № 145 от 28 февраля 2024 г.
2. Pecherskaya E., Semenov A., Golubkov P. [et. al]. Parametric identification of the mathematical model of the micro-arc oxidation process // Heliyon. 2023. Vol. 9 (9). P. e 19995.
3. Pecherskaya E. A., Semenov A. D., Golubkov P. E. Simulation of electrical parameters of a galvanic cell in the process of microarc oxidation// Frontier Materials & Technologies. 2023. Vol. 4. P. 73–85.
4. Golubkov P. E., Pecherskaya E. A., Kochegarov I. I. [et. al]. Simulation of microarc oxidation process based on equivalent electric circuit // SCM 2019 : proc. of 22nd International conference on soft computing and measurements. Saint-Petersburg, 2019. P. 200–203.
5. Голубков П. Е., Печерская Е. А., Кочегаров И. И. [и др.]. Моделирование процесса микродугового оксидирования на основе эквивалентной электрической схемы // SCM-2019 : материалы Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям. СПб. : СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), 2019. Т. 1. С. 296–299.
6. Суминов И. В., Эпельфельд А. В., Людин В. Б. [и др.]. Микродуговое оксидирование (теория, технология, оборудование). М. : ЭКОМЕТ, 2005. 368 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ МАГНИТНОГО НАНОКОМПОЗИТА

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Построены математические модели (с учетом обмена и граничных условий), и разработан вычислительный алгоритм, позволяющий рассчитать компоненты тензора эффективной магнитной проницаемости и эффективную диэлектрическую проницаемость магнитных нанокompозитов. Приведены результаты расчета тензора эффективной магнитной проницаемости для магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы в модели, учитывающей обменное и магнитно-дипольное взаимодействие между магнитными наночастицами.

Ключевые слова: тензор эффективной магнитной проницаемости, эффективная диэлектрическая проницаемость, магнитный нанокompозит, магнитные наночастицы

MATHEMATICAL MODEL AND COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR CALCULATING THE EFFECTIVE ELECTROMAGNETIC PARAMETERS OF A MAGNETIC NANOCOMPOSITE

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia

radiotech@pnzgu.ru

Abstract. Mathematical models (taking into account exchange and boundary conditions) and a computational algorithm to calculate the components of the effective magnetic permeability tensor and the effective permittivity of magnetic nanocomposites have been developed. The results of calculating the effective magnetic permeability tensor for a magnetic nanocomposite based on an opal matrix in a model that takes into account the exchange and magnetic-dipole interaction between magnetic nanoparticles are presented.

Keywords: effective magnetic permeability tensor, effective dielectric constant, magnetic nanocomposite, magnetic nanoparticles

Введение

Возрастающий интерес к новому классу функциональных наноструктурных материалов – магнитным нанокompозитам обусловлен как

возможностью исследования фундаментальных свойств систем магнитных частиц (МНЧ) и кластеров малых размеров (порядка нескольких нанометров), так и широкой областью применения в приборах и устройствах СВЧ, нанопроцессорах магнитофотоники, а также спинтронике, магнитных устройствах хранения информации и магнитооптических устройствах [1].

Эксперименты, проведенные в [2] показали, что внешние поля могут значительно изменять характеристики магнитных наноконструкций. В частности, в условиях ферромагнитного резонанса (ФМР) в миллиметровом диапазоне получены изменения до 60 %. Столь большие изменения, которые могут реализоваться в широком интервале частот, представляют интерес для создания управляемых магнитным полем электронных приборов и радиотехнических устройств СВЧ-диапазона. Эти приборы микро- и нанoeлектроники применимы при создании элементной базы для телекоммуникаций, вычислительной техники и физической электроники.

1. Методика расчета компонентов тензора эффективной магнитной проницаемости наноконструкта

Определим эффективные электромагнитные параметры (ЭЭМП) магнитного наноконструкта как квазисплошной гиромангнитной наноструктурированной среды. Введем тензор эффективной магнитной проницаемости (ЭМП) магнитного наноконструкта, который является тензором второго ранга:

$$\vec{\mu}^{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mu^{\Sigma} & -i\mu_{\alpha}^{\Sigma} & 0 \\ i\mu_{\alpha}^{\Sigma} & \mu^{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z^{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

и эффективную диэлектрическую проницаемость (ЭДП) ε^{Σ} , являющуюся скалярной величиной.

В неограниченной гиромангнитной среде в направлении поля подмагничивания $\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$ распространяются продольные (правополяризованная и левополяризованная) волны с волновыми числами [3]

$$\Gamma_{прав} = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon^{\Sigma} \mu_0 (\mu^{\Sigma} + \mu_{\alpha}^{\Sigma})}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{лев} = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon^{\Sigma} \mu_0 (\mu^{\Sigma} - \mu_{\alpha}^{\Sigma})}, \quad (3)$$

в направлении, перпендикулярном полю подмагничивания $\vec{H}_0 = H_0 \vec{x}_0$, – поперечные (обыкновенная и необыкновенная) волны с волновыми числами [3, с. 51].

$$\Gamma_{об} = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon^\Sigma \mu_0}, \quad (4)$$

$$\Gamma_{необ} = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon^\Sigma \mu_0 \frac{\mu^{\Sigma 2} - \mu_\alpha^{\Sigma 2}}{\mu^\Sigma}}. \quad (5)$$

Подставляя рассчитанные значения волновых чисел $\Gamma_0 = v$ продольных и поперечных волн в дисперсионные соотношения (2)–(5) и решая уравнения относительно неизвестных μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ , получаем комплексные значения ЭЭМП: компонент тензора ЭМП μ^Σ , μ_α^Σ и ЭМД ε^Σ .

Система уравнений (2)–(5) относительно неизвестных μ , μ_α , ε – (параметров сплошной гиромангнитной среды) является совместной, т.е., как известно [3], имеет решение, притом единственное. В этом случае искомые значения трех неизвестных μ , μ_α , ε можно определить из аналитического решения уравнений (2)–(4), отбросив одно из уравнений, например уравнение (5) (при этом единственность решения не нарушается). Для гиромангнитной наноструктурированной среды вводим ЭЭМП μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ . Для рассматриваемого случая система уравнений (2)–(5) является квазисовместной относительно неизвестных μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ . Значения μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ , определенные из решения уравнений (2)–(4), будут теперь лишь с некоторой точностью удовлетворять уравнению (5). По этой точности можно судить о степени правомерности введения ЭЭМП μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ , т.е. адекватности модели гиромангнитной наноструктурированной среды как квазисплошной.

Компоненты μ^Σ , μ_α^Σ тензора ЭМП (1) и ЭДП ε^Σ определяются из решения квазисовместной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \mu^\Sigma &= \frac{(\Gamma_\Sigma^+ / k_0)^2 + (\Gamma_\Sigma^- / k_0)^2}{2\varepsilon^\Sigma}, \\ \mu_\alpha^\Sigma &= \frac{(\Gamma_\Sigma^+ / k_0)^2 - (\Gamma_\Sigma^- / k_0)^2}{2\varepsilon^\Sigma}, \\ \varepsilon^\Sigma &= (\Gamma_\Sigma^\parallel / k_0)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где Γ_Σ^+ , Γ_Σ^- , $\Gamma_\Sigma^\parallel$, $\Gamma_\Sigma^\perp$ – волновые числа продольных (правополяризованной и левополяризованной) и поперечных (обыкновенной и необыкновенной) волн, распространяющихся в неограниченной гиромангнитной

среде в направлении $\vec{H}_0$ ($\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$) и перпендикулярно $\vec{H}_0$ ($\vec{H}_0 = H_0 \vec{x}_0$), соответственно; $\mu_z = 1$ [3]; $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Квазисовместная система уравнений (6) имеет решение относительно неизвестных μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ , если выполняется условие

$$(\Gamma_\perp^\Sigma)^2 - \frac{2(\Gamma_\Sigma^+)^2(\Gamma_\Sigma^-)^2}{(\Gamma_\Sigma^+)^2 + (\Gamma_\Sigma^-)^2} = 0. \quad (7)$$

Значения μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ , определенные из решения квазисовместной системы уравнений (6), будут лишь с некоторой точностью удовлетворять условию (7).

На рис. 1 представлены результаты расчета относительной погрешности $\Delta, \%$ выполнимости условия (7) для Γ_Σ^+ , Γ_Σ^- , $\Gamma_\Sigma^\parallel$, $\Gamma_\Sigma^\perp$ (невязки квазисовместной системы уравнений (6) в зависимости от относительной величины $H_0^{\text{отн}} = (H_0 - H_r)/H_r$, где H_r – магнитное поле ФМР.

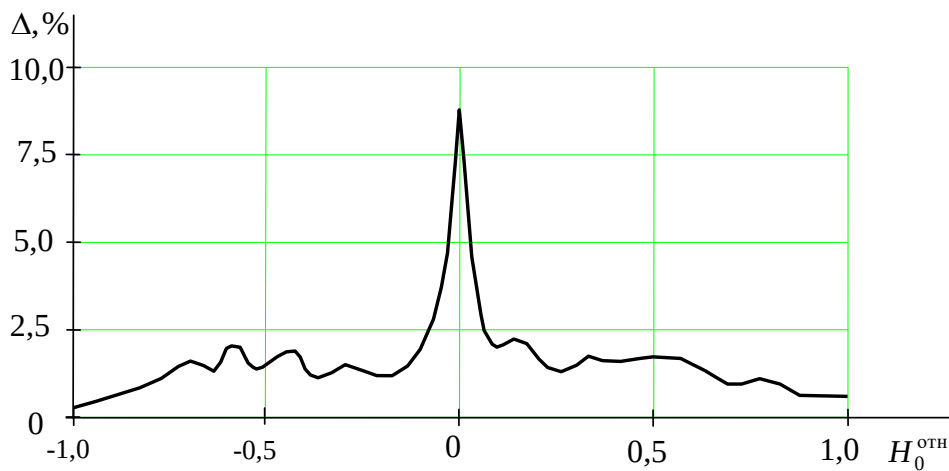


Рис. 1. Относительная погрешность выполнимости условия решения квазисовместной системы уравнений для Γ_Σ^+ , Γ_Σ^- , $\Gamma_\Sigma^\parallel$, $\Gamma_\Sigma^\perp$ в зависимости от $H_0^{\text{отн}} = (H_0 - H_r)/H_r$

Как видно из графика (рис. 1), погрешность составляет менее 2% (за исключением узкой области полей вблизи ФМР. По этой точности можно судить о степени правомерности введения предлагаемой модели расчета ЭЭМП μ^Σ , μ_α^Σ , ε^Σ для магнитного нанокompозита – гироманнитной наноструктурированной среды как квазисплошной.

На рис. 2 показана электродинамическая модель магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы (ОМ) из диэлектрических SiO_2 наносфер, который рассматриваем как квазипериодическую 3D-наноструктуру с геометрическими размерами ячейки a, b, c .

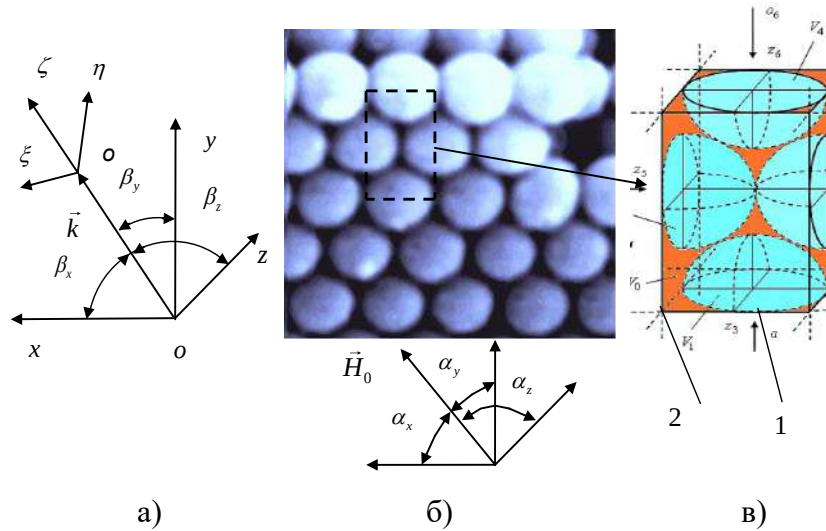


Рис. 2. Электродинамическая модель магнитного нанокompозита на основе OM:
а) направление распространения волнового процесса с волновым вектором $\vec{k}$;
б) периодическая 3D-наноструктура и направление поля подмагничивания $\vec{H}_0$;
в) моделирование ячейки как МФАБ: 1 – диэлектрические SiO_2 наносферы в областях $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, 2 – МНЧ в области $V_0 - V$; V_0 – основная область;
системы координат для входных сечений S_α (граней);
 a, b, c – геометрические размеры ячейки

Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в магнитных нанокompозитах на основе OM проведено на основе решения характеристического уравнения, используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости $\mathbf{Y}$ автономного блока, содержащего магнитное нановключение и с каналами Флоке (МФАБ) [4].

Рассматривая магнитный нанокompозит как бесконечную квазипериодическую 3D-наноструктуру (рис. 2,б), комплексные волновые числа Γ_n электромагнитных волн с компонентами $\vec{E}_n(\xi, \eta)$, $\vec{H}_n(\xi, \eta)$, распространяющихся вдоль оси ζ (рис. 2,а), определяем из решения характеристического уравнения [5]:

$$\Delta(\Gamma_n) = \left| Y_{AA} - H^{-1} \cdot Y_{BA} + Y_{AB} \cdot H - H^{-1} \cdot Y_{BB} \cdot H \right| = 0, \quad (8)$$

где $\Delta(\Gamma_n)$ – определитель матрицы; $Y_{AA}, Y_{BA}, Y_{AB}, Y_{BB}$ – клетки матрицы проводимости МФАБ $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} \\ Y_{BA} & Y_{BB} \end{pmatrix}$ (A, B – индексы входных сечений МФАБ S_1, S_2, S_3 ; и S_4, S_5, S_6 соответственно); $\mathbf{H}$ – диагональная матрица с элементами $h_{x(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n a \cos\beta_x$, $h_{y(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n b \cos\beta_y$,

$h_{z(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n c \cos\beta_z$; $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ – направление распространения волнового процесса (рис. 3,а).

На основе характеристического уравнения (8) проведен электродинамический анализ волн в магнитном нанокompозите на основе ОМ, для чего используется вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости $\mathbf{Y}$ МФАБ [4].

2. Анализ влияния на ЭМП числа магнитных наночастиц в межсферической полости ОМ

Из характеристического уравнения (8) рассчитаны волновые числа $\Gamma^+_\Sigma, \Gamma^-_\Sigma, \Gamma^\Sigma_\parallel, \Gamma^\Sigma_\perp$, продольных и поперечных волн ($n = 0$), и в результате решения квазисовместной системы уравнений (6) относительно неизвестных $\mu^\Sigma, \mu^\Sigma_\alpha, \varepsilon^\Sigma_1$ получены комплексные значения ЭЭМП.

Рассмотрим влияние на ЭМП числа N МНЧ в межсферической полости ОМ в ФАБ (рис. 2, в). Результаты электродинамического расчета действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ^Σ_α компонент тензора ЭМП в зависимости от $H_0^{omn} = (H_0 - H_r)/H_r$, на частоте $f=26$ ГГц ($H_r = 9180$ Э) показаны на рис. 3.

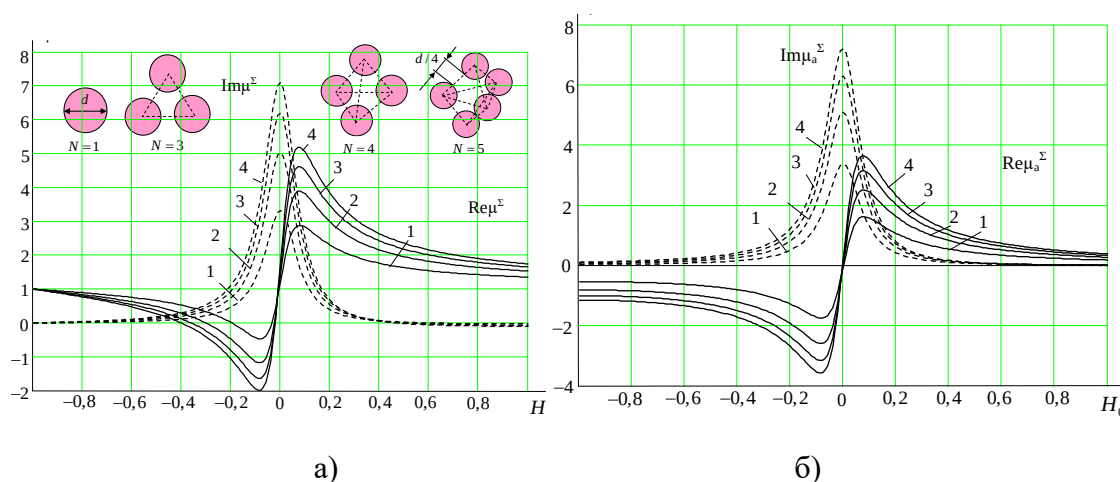


Рис. 3. Расчетные зависимости действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ (а) и недиагональной μ^Σ_α (б) компонент тензора ЭМП от $H_0^{omn} = (H_0 - H_r)/H_r$, при различном числе N МНЧ, учитываемых в модели: $f = 26$ ГГц; кривая 1 – $N = 1$, $d = 50$ нм; 2 – $N = 3$, $d = 35$ нм; 3 – $N = 4$, $d = 31$ нм, 4 – $N = 5$, $d = 29$ нм

Кривые (1–4) на рис. 3 получены при различном числе N (вставка рис. 3) учитываемых в ячейке МНЧ диаметра d (кривая 1 – $N = 1$, $d = 50$ нм; кривая 2 – $N = 3$, $d = 35$ нм; кривая 3 – $N = 4$, $d = 31$ нм, кривая 4 – $N = 5$, $d = 29$ нм), для одинакового во всех вариантах ($N = 1, 3–5$) коэффициента заполнения p межсферического объема МНЧ $p = 0,07$.

В расчете принято, что материал МНЧ $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (намагниченность $4\pi M_s = 5000 \text{ Гс}$; параметр диссипации $\alpha = 0,08$, $\varepsilon = 9,5 - i0,3$), SiO_2 наносферы с параметрами $r = 100 \text{ нм}$, $\varepsilon_v = 4,6 - 4 \cdot 10^{-4}$.

Как показывает анализ результатов расчета (см. рис. 3), при увеличении числа $N = 1-5$, учитываемых МНЧ, с уменьшением их диаметра ($d = 50-29 \text{ нм}$) и сокращении расстояния между ними до длины обменного взаимодействия ЭМП возрастает (кривые 3, 4 рис. 3), несмотря на то, что суммарный объем заполнения полости магнитным компонентом во всех случаях ($N = 1, 3-5$) остается одинаковым.

На рис. 4 показаны для сравнения расчетные и экспериментальные [6] зависимости действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора ЭМП от $H_0^{\text{отн}} = (H_0 - H_r)/H_r$, в области ФМР (в модели $N = 5$, $d = 29 \text{ нм}$, параметры магнитного нанокompозита те же, что и на рис. 3).

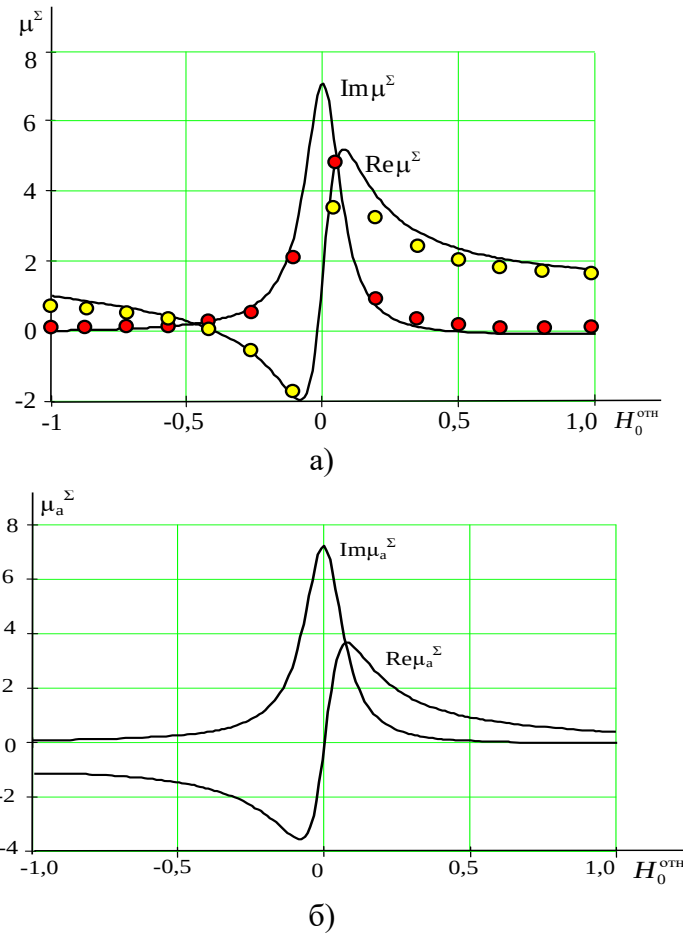


Рис. 4. Зависимости действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ (а)

и недиагональной μ_α^Σ (б) компонент тензора ЭМП от $H_0^{\text{отн}} = (H_0 - H_r)/H_r$,

$$f = 26 \text{ ГГц}, \alpha = 0,08, N = 5, d = 29 \text{ нм},$$

— расчет, $\bigcirc$ — эксперимент [6]

Наилучшее совпадение результатов моделирования с экспериментом в области ФМР наблюдается в модели, учитывающей наибольшее из рассмотренных число МНЧ $N = 5$ с минимальным диаметром ($d = 29$ нм) в полости ОМ (при $\alpha = 0,08$).

Однако в рамках детерминированной модели (при $\alpha = 0,08$) вдали от ФМР ($H_0 < H_r^0$) расчетные значения мнимой части диагональной μ^Σ компоненты тензора ЭМП (рис. 5), определяющие магнитные потери нанокompозита, отличаются от экспериментальных [6].

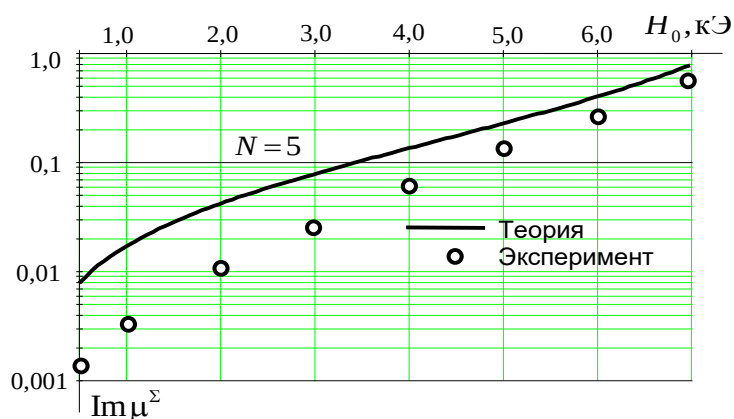


Рис. 5. Зависимости мнимой части диагональной компоненты μ^Σ тензора ЭМП от поля подмагничивания H_0 : $f=26$ ГГц, параметр диссипации $\alpha = 0,08$, $N = 5$, $d = 29$ нм, — расчет, $\bigcirc$ — эксперимент [6, с. 80]

3. Анализ влияния магнитоэлектронного диполь-дипольного и обменного взаимодействий на комплексную ЭМП магнитного нанокompозита

Как следует из результатов математического моделирования (рис. 3), при увеличении числа ($N = 1 - 5$) учитываемых МНЧ в ячейке модели в ФАБ одновременно с уменьшением их диаметра ($d = 50 - 29$ нм) и сокращением расстояния между ними ЭМП нанокompозита возрастает (кривые 3, 4) при постоянном факторе заполнения p межсферической полости МНЧ. Это может быть следствием конкуренции доминирующих магнитных взаимодействий в системе.

Особенности микроволновых магнитных свойств ансамбля МНЧ объясняются взаимодействиями в ансамбле. Намагниченность — важная характеристика ансамбля — определяется как индивидуальными параметрами МНЧ, составляющих ансамбль, так и характером их взаимодействий. В системах ферромагнитных наночастиц в магнитных нанокompозитах возможны оба вида взаимодействий, как магнитоэлектронное диполь-дипольное, так и обменное [7].

Для того, чтобы выявить влияние различных видов взаимодействий обменного и диполь-дипольного — проведен электродинамиче-

ский анализ на основе решения уравнений Максвелла совместно с уравнением движения вектора намагниченности в ферромагнетике в форме Ландау-Лифшица [3]

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)) + \omega_r(\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)), \quad (9)$$

$$\vec{H}_{\text{эф}}(t) = \vec{H}(t) + \vec{H}_q(t), \quad (10)$$

$$\vec{H}_q(t) = q \nabla^2 \vec{M}(t). \quad (11)$$

Здесь $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ – напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{M}(t)$ – намагниченность, $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$ – суммарное эффективное поле, $\vec{H}_q(t)$ – поле обменного взаимодействия, $\vec{H}_0$ – напряженность постоянного магнитного поля; ∇ – оператор Лапласа; γ – гиромагнитное отношение; $\omega_r = \alpha \gamma H_0$ – частота релаксации, α – параметр диссипации; χ_0 – статическая восприимчивость; q – константа обменного взаимодействия.

Согласно уравнению Ландау-Лифшица (9) движение вектора намагниченности определяется эффективным магнитным полем $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$, в котором находится МНЧ. Эффективное поле $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$ (10) представляет собой сумму поля анизотропии, локальных дипольных полей и поля обменного взаимодействия $\vec{H}_q(t)$ (11).

Анализ магнитостатического диполь-дипольного взаимодействия проводится на основе уравнения движения вектора намагниченности в ферромагнетике без учета обменного взаимодействия [3]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma(\vec{M} \times \vec{H}) + \omega_r(\chi_0 \vec{H} - \vec{M}). \quad (12)$$

В уравнении Ландау-Лифшица (9) поле обменного взаимодействия $\vec{H}_q$ теперь не учитывается ($\vec{H}_q = 0$), для чего константа обменного взаимодействия полагается равной $q = 0$.

В “безобменном” приближении на основе уравнений Максвелла, совместно с уравнением (12) проведен электродинамический расчет действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора ЭМП в зависимости от относительной величины $H_0^{\text{отн}} = (H_0 - H_r)/H_r$, на частоте $f = 26$ ГГц (в модели $N = 5$, $d = 29$ нм), результаты которого представлены на рис. 6 (параметры магнитного нанокompозита те же, что и на рис. 3). Для сравнения на рис. 6 (пунктирные кривые) показаны также расчетные зависимости, полученные с учетом обменного взаимодействия (в математической модели при $\vec{H}_q \neq 0$).

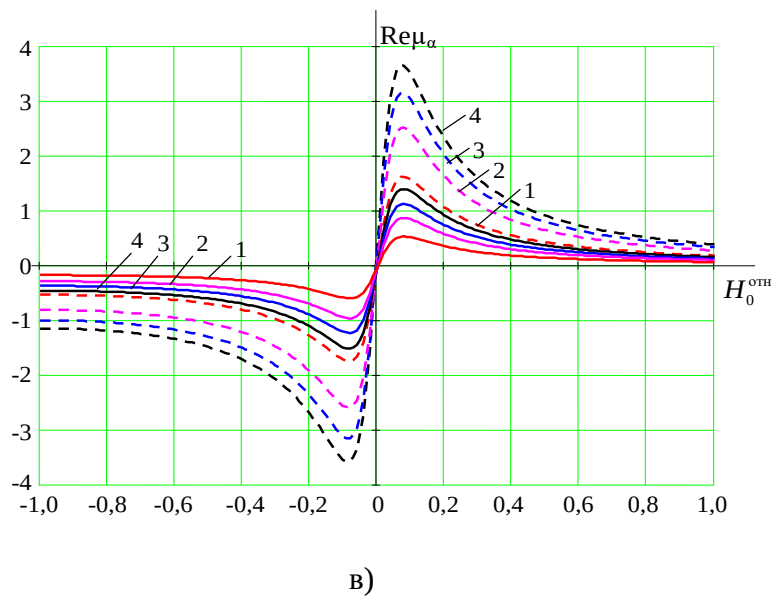
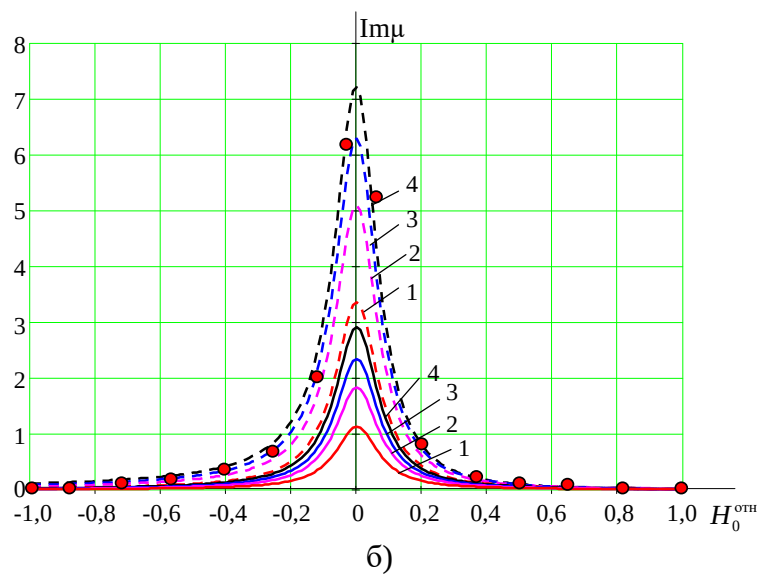
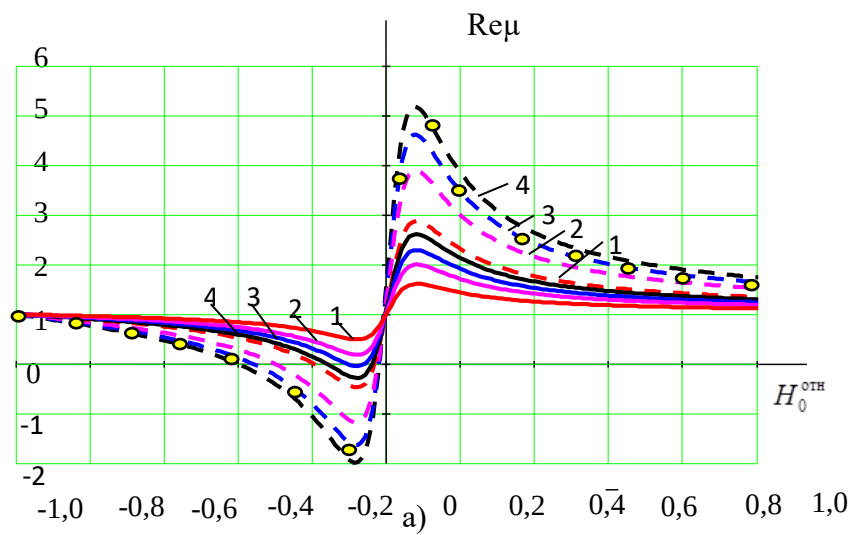


Рис. 6. Начало

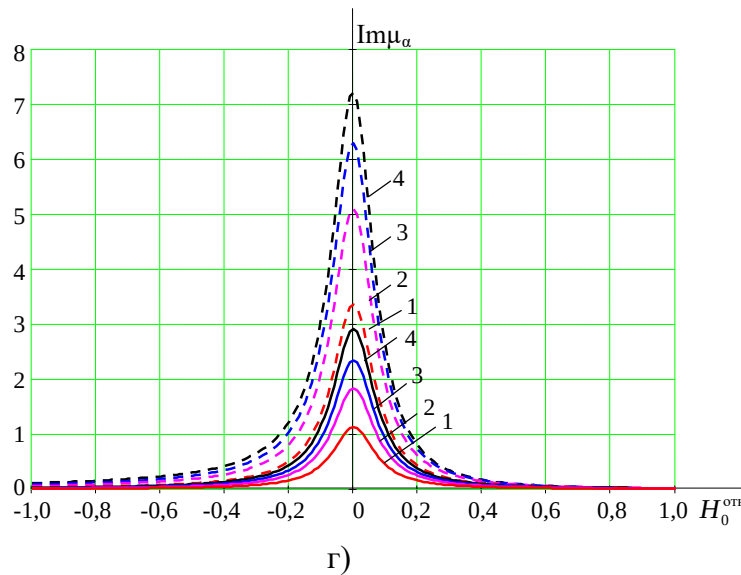


Рис. 6. Зависимости действительной и мнимой частей диагональной μ^Σ (а, б) и недиагональной μ_α^Σ (в, г) компонент тензора ЭМП от $H_0^{omn} = (H_0 - H_r)/H_r$; $f = 26$ ГГц, $\alpha = 0,08$, кривая 1 – $N = 1$, $d = 50$ нм; 2 – $N = 3$, $d = 35$ нм; 3 – $N = 4$, $d = 31$ нм, 4 – $N = 5$, $d = 29$ нм; — в “безобменном” приближении $\vec{H}_q = 0$; - - - с учетом обменного взаимодействия $\vec{H}_q \neq 0$; ○ – эксперимент [6]

Из результатов математического моделирования (рис. 6) следует, что оба вида взаимодействий – магнитостатическое диполь-дипольное и обменное – существенно влияют на внутреннее магнитное поле, и как следствие, на ФМР в магнитном нанокompозите.

В магнитном нанокompозите со слабо взаимодействующими МНЧ, одиночными в ячейке ($N = 1$) и имеющими наибольшие из рассмотренных размеров ($d = 50$ нм), наблюдается значительная деградация ЭМП (сплошная кривая 1 на рис. 6).

Приближение невзаимодействующих МНЧ справедливо, если среднее дипольное магнитное поле, действующее на МНЧ, много меньше поля анизотропии. Если это условие нарушается, тогда кооперативные эффекты, обусловленные магнитными взаимодействиями, существенно изменяют магнитные свойства ансамблей МНЧ [8]. Это подтверждается экспериментальными исследованиями влияния взаимодействия на комплексную магнитную восприимчивость [9, 10].

Как показывает анализ результатов математического моделирования в “безобменном” приближении (сплошные кривые 2-4 рис. 6), при увеличении числа ($N = 3-5$) учитываемых в модели МНЧ, вовлеченных в ансамбль, наряду с уменьшением их диаметра ($d = 50-29$ нм) и уменьшением расстояния между МНЧ, магнитостатическое диполь-дипольное взаимодействие обуславливает изменение ЭМП и эффективного параметра диссипации (сплошные кривые 2-4 рис. 6).

Как показывает сравнение результатов математического моделирования в «безобменном» приближении (сплошные кривые рис. 6) и с учетом обменного взаимодействия (пунктирные кривые), при увеличении числа учитываемых в элементарной ячейке модели МНЧ с уменьшением их геометрических размеров и сокращении расстояния между ними до длины обменного взаимодействия последнее начинает играть доминирующую роль и ЭМП нанокompозита резко возрастает.

При переходе к масштабу порядка длины обменного взаимодействия при наличии сильной связи между МНЧ в ячейке, обусловленной обменными силами, имеет место дополнительный механизм потерь, связанный с возбуждением и совместным движением взаимодействующих между собой поверхностных и объемных спинов в МНЧ [11]. В результате обменного взаимодействия эффективный параметр диссипации (пунктирные кривые 3, 4 рис. 6) резко возрастает) [12].

Таким образом, неоднородное внутреннее магнитное поле и пространственное распределение магнитного момента вызывают существенные изменения ЭМП и эффективного параметра диссипации. Результаты, приведенные на рис. 6, показывают, что магнитные взаимодействия, как магнитостатическое диполь-дипольное, так и обменное, могут быть способом изменения (модуляции) комплексной ЭМП нанокompозитов [13].

Развитый метод численного моделирования, учитывающий влияние магнитостатического диполь-дипольного и обменного взаимодействия, позволяет установить закономерности изменения действительной и мнимой частей компонентов тензора ЭМП магнитного нанокompозита при увеличении числа учитываемых в элементарной ячейке модели МНЧ с уменьшением их геометрических размеров и сокращении расстояния между ними до длины обменного взаимодействия.

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

The co-author regarding the development of the computational method and the algorithm that implements it was Oleg A. Golovanov.

Список литературы

1. Ринкевич А. Б., Устинов В. В., Самойлович М. И. [и др.]. Нанокompозиты на основе опаловых матриц с 3D-структурой, образованной магнитными наночастицами // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2008. № 4. С. 55–63.
2. Timonen V. I., Ras R. H. A., Ikkala O. [et al.]. Magnetic nanocomposites at microwave frequencies, in Trends in nanophysics: theory, experiment,

technology. Engineering Materials Series, Springer-Verlag. Berlin, 2010. P. 257–285.

3. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994.

4. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1421–1428.

5. Макеева Г. С., Голованов О. А. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в наноструктурированных гиромангнитных средах методом автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1455–1459.

6. Ustinov V. V., Rinkevich A. B., Perov D. V. [et al.]. Anomalous magnetic antiresonance and resonance in ferrite nanoparticles embedded in opal matrix // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2012. Vol. 324. P. 78–82.

7. Castel J., Youssef B., Brosseau C. Broadband Ferromagnetic Resonance Measurements in Ni/ZnO and Ni γ -Fe $_2$ O $_3$ Nanocomposites // J. Nanomaterials. 2007. Vol. ID 27437. P. 16.

8. Горобец Ю. И., Джежеря Ю. И., Кравец А. Ф. Магнитное упорядочение в гранулированной системе // Физика твердого тела. 2000. Т. 42, № 1. С. 121–125.

9. Van Lierop J., Ryan D. H. Mössbauer spectra of single-domain fine particle systems described using a multiple-level relaxation model for superparamagnets // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 63, iss. 13. P. 064406.

10. Jönsson P., Jonsson T., García-Palacios J. L. [et al.]. Nonlinear dynamic susceptibilities of interacting and noninteracting nanoparticle systems // J. Magn. Magn. Mater. 1999. Vol. 222, № 1-2. P. 219–226.

11. Shilov V. P., Bacri J.-C., Gazeau F. [et al.]. Effect of unidirectional anisotropy on the ferromagnetic resonance in ferrite nanoparticles // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 60. P. 11902–11905.

12. Pardavie-Horvat M., Makeeva G. S., Golovanov O. A. Nonlinear phenomena in magnetic nanoparticle systems at microwave frequencies // IEEE Trans. Magn. 2008. № 44. P. 3067–3070.

13. Hong Z., Yong Y., Fu-Sheng W. [et al.]. Microwave Magnetic Permeability of Fe $_3$ O $_4$ Nanoparticles // Chin. Phys. Lett. 2009. Vol. 26, № 1. P. 017501.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
СВЧ- И ТГц-ДИАПАЗОНОВ С 3D-МАССИВАМИ МАГНИТНО-
ФУНКЦИОНАЛИЗИРОВАННЫХ
УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК**

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. На основе решения 3D-задачи дифракции для уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица проекционным методом Галеркина разработан вычислительный алгоритм определения дескриптора автономных блоков с виртуальными каналами Флоке (МФАБ), содержащих магнитно-функционализированные углеродные нанотрубки (МУНТ). На основе характеристического уравнения, используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости МФАБ, проведен электродинамический расчет комплексных волновых чисел продольных и поперечных волн, распространяющихся в 3D-массивах МУНТ, в зависимости от напряженности поля подмагничивания на частотах миллиметрового и терагерцового диапазонов.

Ключевые слова: уравнение Ландау – Лифшица, проекционный метод, автономный блок с виртуальными каналами Флоке, магнитно-функционализированные углеродные нанотрубки

**MATHEMATICAL MODELING OF THE RESONANT INTERACTION
OF ELECTROMAGNETIC RADIATION WITH 3D ARRAYS
OF MAGNETICALLY FUNCTIONALIZED CARBON NANOTUBES
IN THE MICROWAVE AND THZ RANGES**

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia

radiotech@pnzgu.ru

Abstract. By solving the 3D diffraction problem for the Maxwell's equations together with the Landau-Lifshitz equation using the Galerkin projection method, a computational algorithm has been developed for determining the descriptor of autonomous blocks with virtual Floquet channels (MFAB) containing magnetically functionalized carbon nanotubes (MCNTs) with encapsulated magnetic nanoparticles. Based on the characteristic equation, using the developed computational algorithm for calculating the MFAB conductivity matrix, the electrodynamic calculation of the complex wave numbers of longitudinal and transverse waves

propagating in 3D arrays of MCNTs was carried out, depending on the strength of the bias field at frequencies of millimeter and terahertz ranges.

Keywords: Landau-Lifshitz equation, projection method, autonomous blocks with virtual Floquet channels, magnetically functionalized carbon nanotubes

Введение

Массивы ориентированных магнитнофункционализированных углеродных нанотрубок (МУНТ), инкапсулированных магнитными наночастицами (МНЧ) [1–4], перспективны для создания поглощающих и экранирующих наноструктурных материалов с целью разработки экранов электромагнитного излучения, изготовления СВЧ-фильтров и поглощающих нагрузок.

В [1] экспериментально исследовано взаимодействие электромагнитного излучения с массивом ориентированных многослойных УНТ, заполненных МНЧ (в виде фаз Fe_3C , α – γ Fe), в диапазоне частот от 53,5 до 78,3 ГГц и обнаружено резонансное поглощение микроволн при ортогональной ориентации осей УНТ относительно вектора электрического поля волны в волноводе. Учитывая высокую анизотропию формы исследуемых УНТ, заполненных Fe_3C , можно предположить, что наблюдаемые пики поглощения электромагнитного излучения в этих материалах [1] связаны с ферромагнитным резонансом (ФМР) во внутреннем эффективном поле магнитной анизотропии. В таких случаях математическое моделирование позволяет правильно интерпретировать получаемые в эксперименте данные, которые являются неоднозначными из-за сложности эксперимента и усреднения величин в процессе измерения.

1. Математическая модель и построение вычислительного алгоритма решения краевой 3D-задачи дифракции

Математическая модель распространения, дифракции и взаимодействия электромагнитных волн с 3D-массивами МУНТ, базируется на решении краевой 3D-задачи дифракции для уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица [5]:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \varepsilon_{\text{МНЧ}} \vec{E};$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{M} - i\omega \mu_0 \vec{H};$$

$$(\omega_r + i\omega) \vec{M} - \omega_r \chi_0 (\vec{H} + \vec{H}_q) + \gamma (\vec{M}_0 \times (\vec{H} + \vec{H}_q) + \vec{M} \times \vec{H}_0) = 0; \quad (1)$$

$$\mu_0 \vec{H}_q = q \text{grad div } \vec{M} - q \text{rot rot } \vec{M},$$

$$\text{где } \varepsilon_{\text{МНЧ}} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}.$$

Здесь ω – частота; $\vec{E}$, $\vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{M}$ – вектор намагниченности среды; $\vec{H}_0$ – постоянное магнитное поле, $\vec{M}_0$ – постоянная намагниченность; $\vec{H}_q$ – эффективное поле обменного взаимодействия; $\vec{H}_{эфф} = \vec{H} + \vec{H}_q$ – суммарное эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент МНЧ; ∇ – оператор Лапласа; ε – диэлектрическая проницаемость; σ – объемная проводимость среды; μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; γ – гиромагнитное отношение; $\omega_r = \alpha\gamma H_0$ – частота релаксации; α – магнитные потери; $\chi_0 = M_0 / H_0$ – статическая восприимчивость; q – константа обменного взаимодействия.

Запишем третье уравнение (1) в тензорной форме:

$$\vec{H} + \vec{H}_q = \tilde{\eta} \vec{M}, \quad (2)$$

где $\tilde{\eta} = \mu_0^{-1} \begin{pmatrix} \omega_r \chi_0 & \gamma M_{0z} & -\gamma M_{0y} \\ -\gamma M_{0z} & \omega_r \chi_0 & \gamma M_{0x} \\ \gamma M_{0y} & -\gamma M_{0x} & \omega_r \chi_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i\omega + \omega_r & -\gamma H_{0z} & \gamma H_{0y} \\ \gamma H_{0z} & i\omega + \omega_r & -\gamma H_{0x} \\ -\gamma H_{0y} & \gamma H_{0x} & i\omega + \omega_r \end{pmatrix}$ – тензор.

Уравнение в форме (2) справедливо для МНЧ эллипсоидальной формы, так как в этом случае постоянное магнитное поле $\vec{H}_0 = H_{0x} \vec{i} + H_{0y} \vec{j} + H_{0z} \vec{k}$ и постоянная намагниченность $\vec{M}_0 = M_{0x} \vec{i} + M_{0y} \vec{j} + M_{0z} \vec{k}$ в МНЧ являются однородными [5].

Подставляя (2) в (1) и исключая $\vec{H}_q$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= i\omega \varepsilon_{\text{МНЧ}} \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \vec{M} - i\omega \mu_0 \vec{H}; \\ q \text{rot rot } \vec{M} - q \text{grad div } \vec{M} &= \mu_0 \vec{H} - \mu_0 \tilde{\eta} \vec{M}. \end{aligned} \quad (3)$$

3D-массив МУНТ рассматриваем как периодическую 3D-наноструктуру (рис. 1,а). Элементарная ячейка 3D-наноструктуры (рис. 1,б) разбивается на автономные блоки с виртуальными каналами Флоке (ФАБ) [6] двух видов, содержащих МНЧ (МФАБ) [7] и без МНЧ в УНТ (рис. 1,в). Автономный блок 4 (без МНЧ в УНТ) является частным случаем МФАБ 3 (рис. 1,г).

Сложная структура 3D-массива МУНТ требует определения дескриптора ФАБ (рис. 1,в), содержащего МУНТ с инкапсулированными

МНЧ (МФАБ). Дескриптор (в линейном приближении в виде матрицы рассеяния $\mathbf{R}$ или проводимости $\mathbf{Y}$) МФАБ определяем из решения краевой 3D-задачи дифракции проекционным методом Галеркина [8].

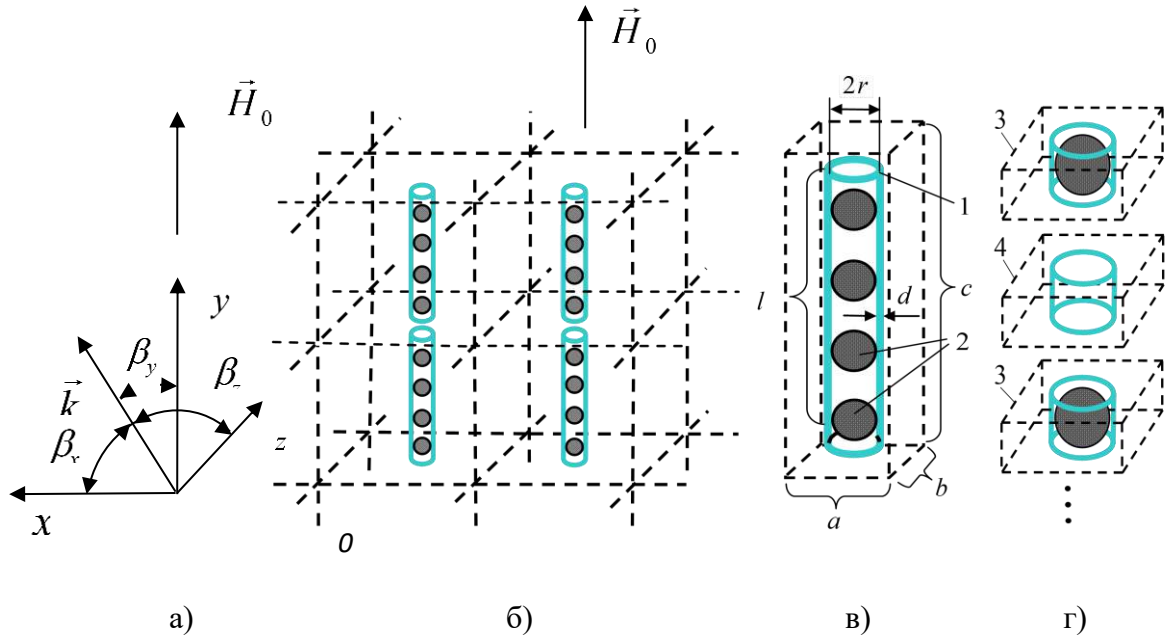


Рис. 1. Электродинамическая модель 3D-массива МУНТ и расчетная схема:
а) направление распространения волнового процесса с волновым вектором k ;
б) периодическая 3D-наноструктура и ориентация вектора поля подмагничивания;
в) моделирование ячейки как МФАБ): 1 – УНТ, 2 – МНЧ;
 a, b, c – геометрические размеры ФАБ; г) декомпозиция ячейки

Построим вычислительный алгоритм решения краевой 3D-задачи дифракции для определения матрицы проводимости $\mathbf{Y}$ МФАБ 3 в виде прямоугольного параллелепипеда, содержащего МУНТ с МНЧ (рис. 2).

Запишем систему уравнений (3) для областей МФАБ (рис. 2), используя кусочно-неоднородную функцию заполнения полости МФАБ:

$$\text{rot } \vec{H} = i\omega \tilde{\epsilon} \vec{E};$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{M} - i\omega \mu_0 \vec{H}; \quad (4)$$

$$q \text{rot rot } \vec{M} - q \text{grad div } \vec{M} = \mu_0 \vec{H} - \mu_0 \tilde{\eta} \vec{M},$$

где

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon_{\text{МНЧ}}, & \text{в } V_{\text{МНЧ}}, \\ \epsilon_{\text{УНТ}}, & \text{в } V_{\text{УНТ}}, \\ \epsilon_{\text{зап}}, & \text{в } V_0 - V_{\text{МНЧ}} - V_{\text{УНТ}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{M} \neq 0, & \text{в } V_{\text{МНЧ}}, \\ \vec{M} = 0, & \text{в } V_{\text{УНТ}}, \\ \vec{M} = 0, & \text{в } V_0 - V_{\text{МНЧ}} - V_{\text{УНТ}}. \end{cases}$$

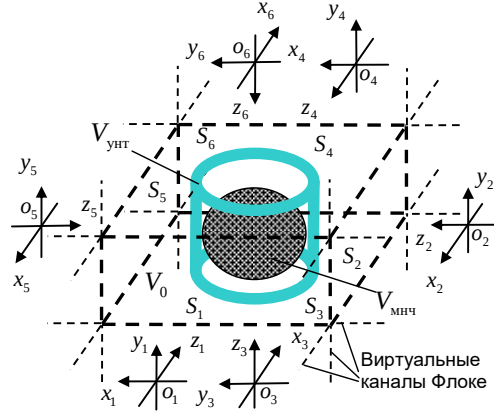


Рис. 2. Автономный блок в виде прямоугольного параллелепипеда, содержащего МУНТ с МНЧ и виртуальными каналами Флоке на гранях (МФАБ):

V_0 – основная область МФАБ, $V_{\text{унт}}$ – область УНТ, $V_{\text{мнч}}$ – область МНЧ,
 $o_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$) – локальные системы координат для сечений (граней) S_α

Построим проекционную модель [5] для системы дифференциальных уравнений (4). Сформулируем вспомогательную краевую задачу на собственные значения (частоты) [5] для прямоугольного резонатора с геометрическими размерами основной области МФАБ (область V_0 на рис. 2):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_k &= i \omega_k \varepsilon_0 \vec{E}_k; \\ \text{rot } \vec{E}_k &= -i \omega_k \mu_0 \vec{H}_k, \end{aligned} \right\} \text{ в области } V_0, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_k(S_1) &= \vec{E}_k(S_4), \quad \vec{H}_k(S_1) = \vec{H}_k(S_4); \\ \vec{E}_k(S_2) &= \vec{E}_k(S_5), \quad \vec{H}_k(S_2) = \vec{H}_k(S_5); \\ \vec{E}_k(S_3) &= \vec{E}_k(S_6), \quad \vec{H}_k(S_3) = \vec{H}_k(S_6). \end{aligned} \right\} \text{ на гранях,}$$

где ω_k – собственные частоты резонатора, $\vec{E}_k, \vec{H}_k$ – собственные электрические и магнитные поля резонатора.

Используя краевую задачу на собственные значения (5), тождество векторного анализа $\vec{b} \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \text{rot } \vec{b} = \text{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$, формулу Остроградского-Гаусса и условие неасимптотического излучения [9], запишем для системы уравнений (1) проекционную интегральную модель:

$$\sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{E} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta = -i \omega_k \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV - i \omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV - i \omega_k \int_{V_{\text{мнч}}} \vec{M} \cdot \vec{H}_k^* dV,$$

$$\sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H} \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta = i \omega_k \int_{V_0} \tilde{\varepsilon} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV + i \omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV, \quad (6)$$

$$q \int_{V_{\text{МНЧ}}} \left(\text{rot rot } \vec{M} - \text{grad div } \vec{M} \right) \cdot \vec{H}_k^* dV = \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV - \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{\eta} \vec{M} \cdot \vec{H}_k^* dV ,$$

$$b_{q(\alpha)} = \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha , \quad k=1,2,\dots,N_0, \quad q=1,2,\dots,N_\alpha, \quad \alpha=1,2,\dots,6 .$$

Решение краевой задачи ищем в виде линейной комбинации по системам функций $\{\vec{E}_n\}$, $\{\vec{H}_n\}$ (собственные функции прямоугольного резонатора), $\{\vec{e}_{l(\beta)}\}$, $\{\vec{h}_{l(\beta)}\}$ (собственные функции каналов Флоке).

В области V_0 МФАБ (рис. 2):

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{N_0} \tilde{a}_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_{n=1}^{N_0} \tilde{b}_n \vec{H}_n, \quad \vec{M} = \sum_{n=1}^{N_0} d_n \vec{H}_n, \quad (7)$$

где N_0 – число базисных функций в области МФАБ V_0 .

На гранях S_β ($\beta=1,2,\dots,6$) МФАБ:

$$\vec{E}_\beta = \sum_{l=1}^{N_\beta} a_{l(\beta)} \vec{e}_{l(\beta)}, \quad \vec{H}_\beta = \sum_{l=1}^{N_\beta} b_{l(\beta)} \vec{h}_{l(\beta)} \quad (8)$$

где N_β – число базисных функций на гранях МФАБ S_β .

Подставляя (7) и (8) в (6), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{d} &= -\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{d} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{W} \cdot \tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{W}, \mathbf{L}$ – матрицы с элементами:

$$A_{kn} = i \omega_k \delta_{kn}, \quad B_{kn} = i \omega \delta_{kn},$$

$$C_{kn} = \begin{pmatrix} i \omega \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV & i \omega \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV \\ i \omega \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV & i \omega \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV \end{pmatrix},$$

$$D_{kn} = \begin{pmatrix} i \omega \int_{V_0} \tilde{\varepsilon} \vec{E}_{n'}^c \cdot \vec{E}_{k'}^{c*} dV & i \omega \int_{V_0} \tilde{\varepsilon} \vec{E}_{n''}^\pi \cdot \vec{E}_{k'}^{c*} dV \\ i \omega \int_{V_0} \tilde{\varepsilon} \vec{E}_{n'}^c \cdot \vec{E}_{k''}^{\pi*} dV & i \omega \int_{V_0} \tilde{\varepsilon} \vec{E}_{n''}^\pi \cdot \vec{E}_{k''}^{\pi*} dV \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
U_{kn} &= \begin{pmatrix} i\omega_{k'}\delta_{k'n'} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^c \times \vec{E}_{k'}^{c*}) \cdot dS_\beta & i\omega_{k'}\delta_{k'n''} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n''}^\pi \times \vec{E}_{k'}^{c*}) \cdot dS_\beta \\ i\omega_{k''}\delta_{k'n'} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^c \times \vec{E}_{k''}^{\pi*}) \cdot dS_\beta & i\omega_k\delta_{kn} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n''}^\pi \times \vec{E}_{k''}^{\pi*}) \cdot dS_\beta \end{pmatrix}, \\
F_{kn} &= \begin{pmatrix} \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV & \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV \\ \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV & \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV \end{pmatrix}, \\
G_{kn} &= \begin{pmatrix} q\lambda_n \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV + \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \tilde{\chi}^{-1} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV & q\lambda_n \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV + \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \tilde{\eta} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k'}^{c*} dV \\ q\lambda_n \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV + \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \tilde{\chi}^{-1} \vec{H}_{n'}^c \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV & q\lambda_n \int_{V_{\text{МНЧ}}} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV + \mu_0 \int_{V_{\text{МНЧ}}} \tilde{\eta} \vec{H}_{n''}^\pi \cdot \vec{H}_{k''}^{\pi*} dV \end{pmatrix}, \\
W_{q(\alpha)n} &= \begin{pmatrix} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_{n'}^{c*}) \cdot dS_\alpha & \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_{n''}^{\pi*}) \cdot dS_\alpha \end{pmatrix}, \\
L_{kl(\beta)} &= \begin{pmatrix} \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_{k'}^{c*}) \cdot dS_\beta \\ \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_{k''}^{\pi*}) \cdot dS_\beta \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\dots,N_0, \quad q=1,2,\dots,N_\alpha, \quad \alpha=1,2,\dots,6.
\end{aligned}$$

Компонентами векторов $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ являются коэффициенты рядов Фурье (9) и (10) соответственно равны $\{\tilde{a}_n\}, \{\tilde{b}_n\}, \{d_n\}, \{a_{l(\beta)}\}, \{b_{l(\beta)}\}$.

Исключая векторы $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{d}$ из СЛАУ (11) получаем матрицу проводимости $\mathbf{Y}$ МФАБ (рис. 1, в фрагмент 3),:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{L}. \quad (10)$$

Для ФАБ, не содержащего МНЧ (рис. 1, в фрагмент 4), матрица проводимости $\mathbf{Y}$ определяется из (10) при $\mathbf{C}=\mathbf{0}, \mathbf{G}=\mathbf{0}, \mathbf{F}=\mathbf{0}$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{L}. \quad (11)$$

2. Продольные и поперечные волны в 3D-массивах МУНТ в условиях ФМР в миллиметровом диапазоне

Методом МФАБ проведено математическое моделирование распространения электромагнитных волн в 3D-массивах МУНТ в миллиметровом диапазоне.

Геометрия задачи – направление распространения волнового процесса и модель 3D-массива МУНТ, который рассматриваем как квазипериодическую 3D-наноструктуру с геометрическими размерами ячейки a, b, c , показана на рис. 1.

Математическая модель распространения электромагнитных волн в периодических 3D-массивах МУНТ базируется на решении характеристического уравнения [10] для определения комплексных волновых чисел волн Γ_n :

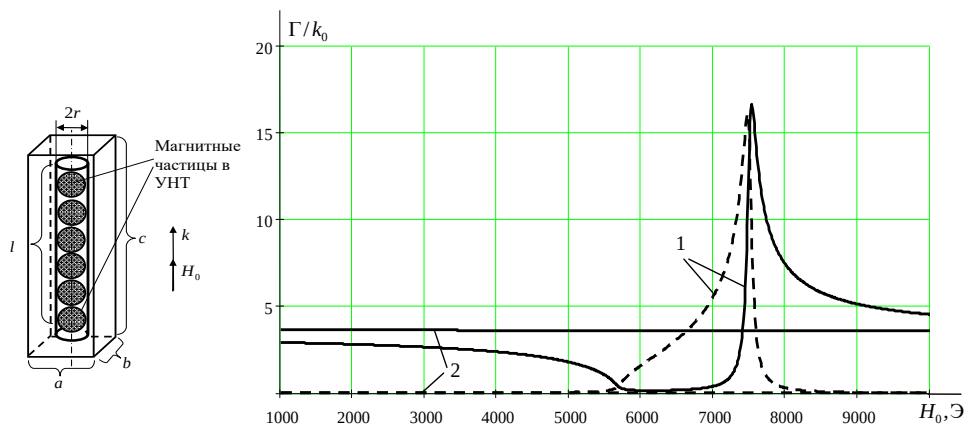
$$\Delta(\Gamma_n) = |Y_{AA} - H^{-1} \cdot Y_{BA} + Y_{AB} \cdot H - H^{-1} \cdot Y_{BB} \cdot H| = 0, \quad (12)$$

где $\Delta(\Gamma_n)$ – определитель матрицы; $Y_{AA}, Y_{BA}, Y_{AB}, Y_{BB}$ – клетки матрицы проводимости Y ФАБ (27), $Y = \begin{pmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} \\ Y_{BA} & Y_{BB} \end{pmatrix}$ (A, B – индексы входных сечений ФАБ S_1, S_2, S_3 ; и S_4, S_5, S_6 , соответственно); H – диагональная матрица с элементами $h_{x(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n a \cos \beta_x$, $h_{y(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n b \cos \beta_y$, $h_{z(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n c \cos \beta_z$; $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ – направление распространения волнового процесса (рис. 2,а).

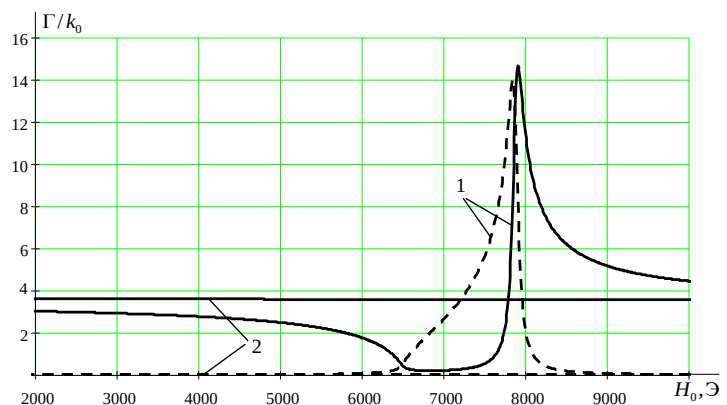
На основе характеристического уравнения (12), используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости Y МФАБ, проведен электродинамический расчет комплексных волновых чисел Γ_0 (нулевой пространственной гармоники) продольных и поперечных волн, распространяющихся в 3D-массивах МУНТ (вектор поля подмагничивания H_0 направлен вдоль оси УНТ (рис. 1)) в миллиметровом диапазоне.

Результаты электродинамического расчета действительной и мнимой частей комплексных волновых чисел правополяризованной Γ^+_{Σ} и левополяризованной Γ^-_{Σ} волн, распространяющихся в 3D-массиве МУНТ с продольным подмагничиванием (вставка рис. 3), в зависимости от поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26$ ГГц для 3D-массивов с различным числом N МНЧ сферической геометрии диаметра d в УНТ (рис. 1) показаны на рис. 3, а-д для $N = 20, N = 10, N = 15, N = 5, N = 1$, соответственно.

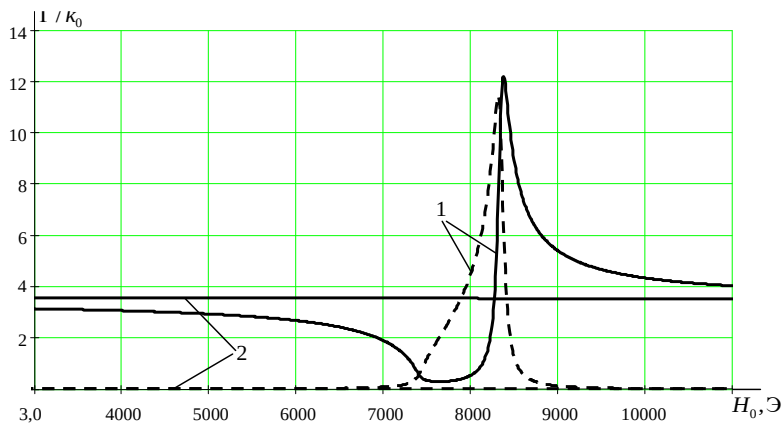
3D-массив МУНТ (рис. 1) состоит из периодической 3D-решетки УНТ (радиус УНТ $2r = 25$ нм, длина УНТ $l = 500$ нм; толщина стенки $\Delta = 3$ нм ($\sigma = 2.5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\varepsilon = 62$); материал МНЧ $\text{Co}_{80}\text{Ni}_{20}$ ($4\pi M_s = 15356 \text{ Гс}$, $\alpha = 0,005$, $\sigma = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $A = 1,5 \times 10^{-9} \text{ Э}$); период решетки $a = b = 76$ нм, $c = 550$ нм.



а)



б)



в)

Рис. 3. Зависимости действительной и мнимой частей комплексных волновых чисел Γ_0 правополяризованной и левополяризованной волн в 3D-массе МУНТ с различным числом МНЧ от поля подмагничивания H_0 : $f = 26 \text{ ГГц}$;
а) $N = 20$; б) $N = 15$; в) $N = 10$; г) $N = 5$; д) $N = 1$; кривые 1 – правополяризованная волна, 2 – левополяризованная волна; — — — — — $\text{Re} \Gamma_0$; - - - - - $\text{Im} \Gamma_0$

(начало)

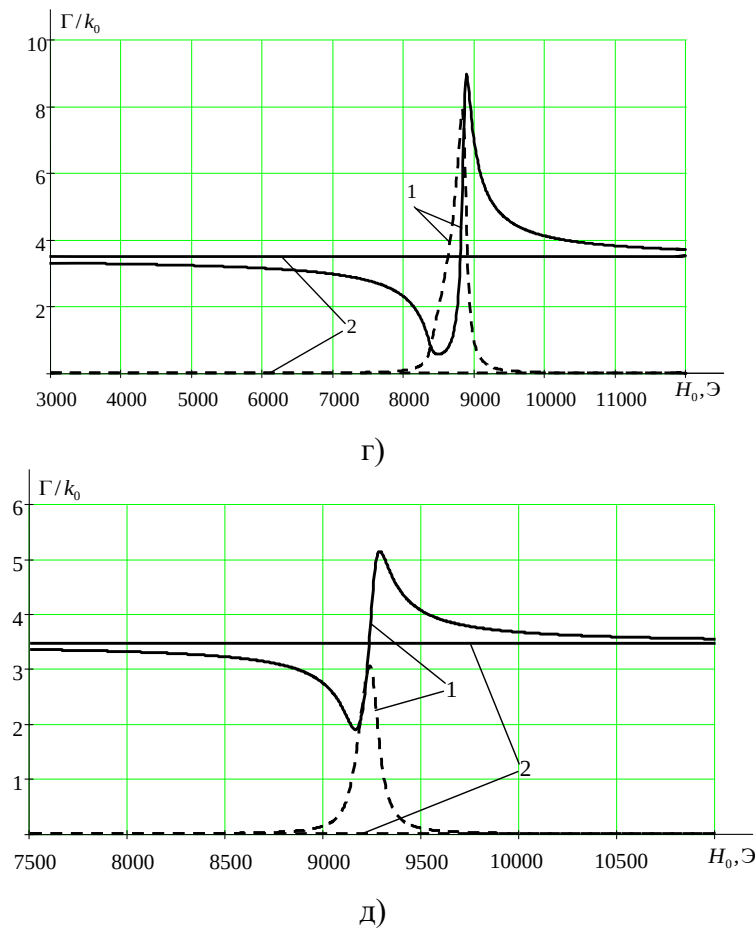


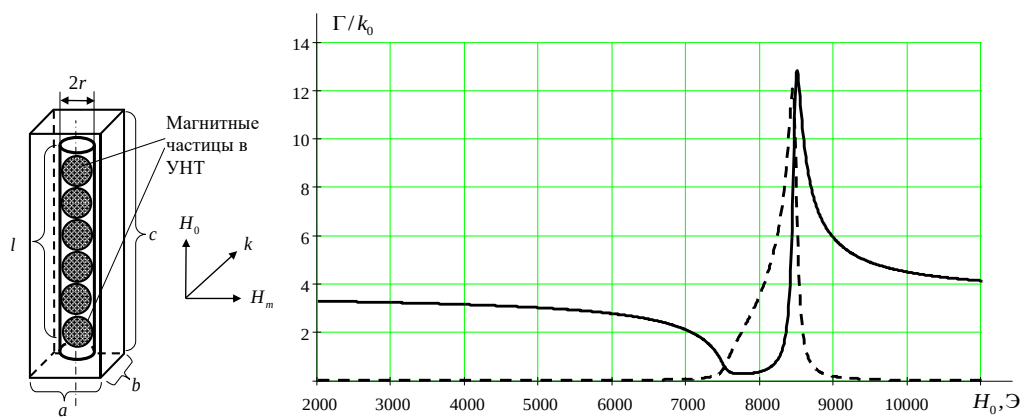
Рис. 3 (окончание)

Как следует из результатов расчета (рис. 3,а-д), положение резонансного пика мнимой части комплексного волнового числа $Im \Gamma_0$ правополяризованной волны изменяется при изменении числа N МНЧ в УНТ. Максимум резонансного поглощения определяется значениями $H_{0рез}$, которые отличаются от ФМР в неограниченной гиромагнитной среде [5]:

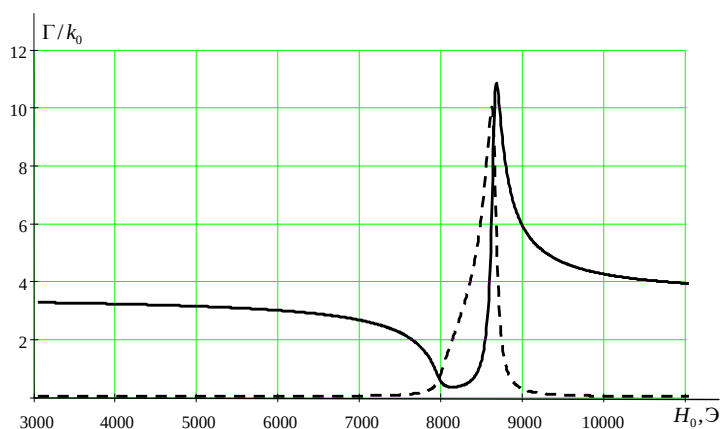
$$\frac{\omega_0}{\gamma} = H_0 \quad (13)$$

(при $N = 1$ для магнитной наносферы $H_{0рез} = 9248 \text{ Э}$ (рис. 3,д)), при $N > 1$ изменяются и соответствуют собственным частотам ФМР однородного типа прецессии намагниченности 3D-массивов МУНТ с различным числом N МНЧ (рис. 3,а-д).

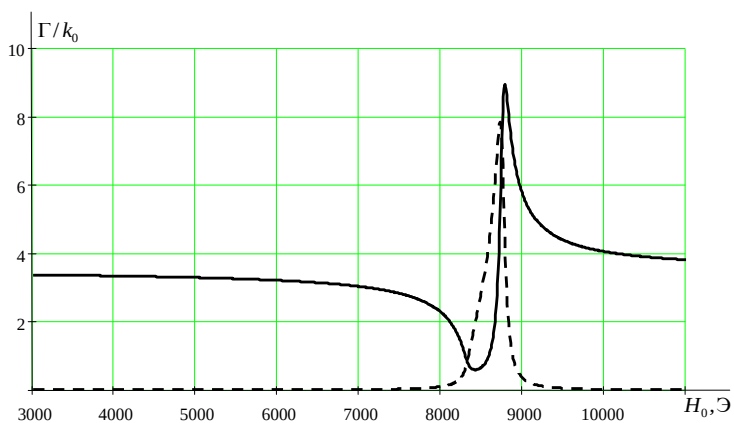
Результаты электродинамического расчета действительной и мнимой частей комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны, распространяющейся в 3D-массивах МУНТ с поперечным подмагничиванием (вставка рис. 4), в зависимости от поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26 \text{ ГГц}$ для различного числа N МНЧ в УНТ, показаны на рис. 4,а-д для $N = 20, N = 15, N = 10, N = 5, N = 1$ соответственно.



а)



б)



в)

Рис. 4. Зависимости действительной и мнимой частей комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны в 3D-массах МУНТ с различным числом

N МНЧ в УНТ от поля подмагничивания H_0 : $f = 26 \text{ ГГц}$;

а) $N = 20$, б) $N = 10$, в) $N = 5$, г) $N = 1$; — — — — — $\text{Re} \Gamma_0$; - - - - - $\text{Im} \Gamma_0$ (начало)

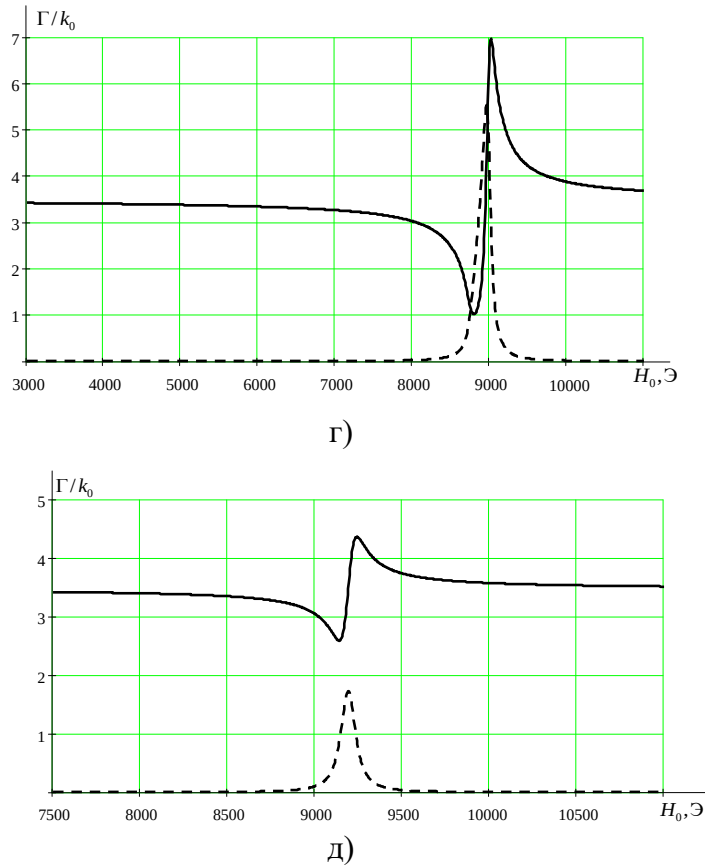


Рис. 4 (окончание)

Как следует из результатов расчета (рис. 4), положение резонансного пика мнимой части комплексного волнового числа квазинеобыкновенной волны определяется значениями $H_{0рез}$, которые отличаются от поперечного ФМР в гиромангнитной среде [5]. $H_{0рез}$

$$\omega_{\perp} = \gamma H_0 \sqrt{1 + \frac{4\pi M_0}{H_0}} \quad (14)$$

($H_0 = 4342$ Э) и соответствуют собственным частотам ФМР однородного типа прецессии намагниченности 3D-массива МУНТ, изменяющимися при изменении числа N МНЧ в УНТ.

3. Взаимодействие ТГц излучения с 3D-массивами магнитофункционализированных УНТ

На основе характеристического уравнения (12), используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости $\mathbf{Y}$ МФАБ, проведен электродинамический расчет комплексных волновых чисел Γ_0 (нулевой пространственной гармоники) продольных и поперечных волн, распространяющихся в 3D-массивах МУНТ (вектор $\vec{H}_0$ направлен вдоль оси УНТ рис. 1), в ТГц диапазоне.

Результаты электродинамического расчета действительной и мнимой частей комплексных волновых чисел правополяризованной Γ^+_{Σ} и левополяризованной Γ^-_{Σ} волн, распространяющихся в 3D-массиве МУНТ с продольным подмагничиванием (вставка рис. 6), в зависимости от поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 1$ ТГц для различного числа N МНЧ в УНТ (рис. 1) показаны на рис. 5 для $N = 20$.

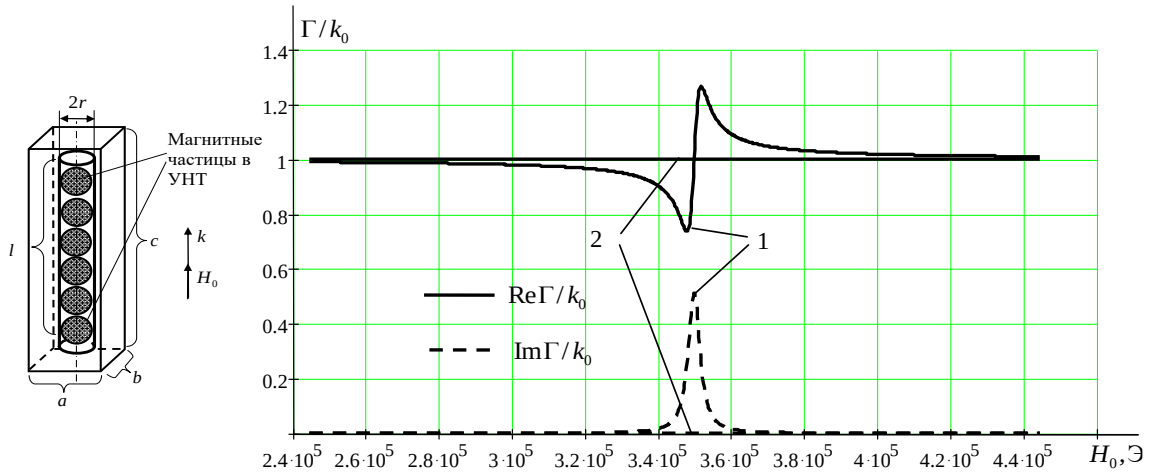


Рис. 5. Зависимости действительной и мнимой частей комплексных волновых чисел Γ_0 правополяризованной и левополяризованной волн в 3D-массиве МУНТ от поля подмагничивания H_0 : $N = 20$, $f = 1$ ТГц; кривые 1 – правополяризованная волна; 2 – левополяризованная волна, — — — — — $\text{Re}\Gamma_0$; - - - - - $\text{Im}\Gamma_0$

Как следует из результатов расчета (рис. 5), положение резонансного пика мнимой части комплексного волнового числа $\text{Im}\Gamma_0$ правополяризованной волны изменяется при изменении числа N МНЧ в УНТ. Максимум резонансного поглощения определяется значениями $H_{0\text{рез}}$, которые отличаются от ФМР в неограниченной гиромагнитной среде (13) [5] и изменяются и соответствуют собственным частотам ФМР однородного типа прецессии намагниченности 3D-массивов МУНТ с различным числом N МНЧ (рис. 5).

Результаты электродинамического расчета действительной и мнимой частей комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны, распространяющейся в 3D-массиве МУНТ с поперечным подмагничиванием (вставка рис. 6), в зависимости от поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 1$ ТГц показаны на рис. 7 для $N = 20$.

Как следует из результатов расчета (рис. 6), положение резонансного пика мнимой части комплексного волнового числа квазиобыкновенной волны определяется значениями напряженности поля подмагничивания $H_{0\text{рез}}$, отличающимися от поперечного ФМР в гирос-

магнитной среде (14) [5] и соответствующими собственным частотам ФМР однородного типа прецессии намагниченности 3D-массива МУНТ, которые изменяются при изменении числа N МНЧ в УНТ.

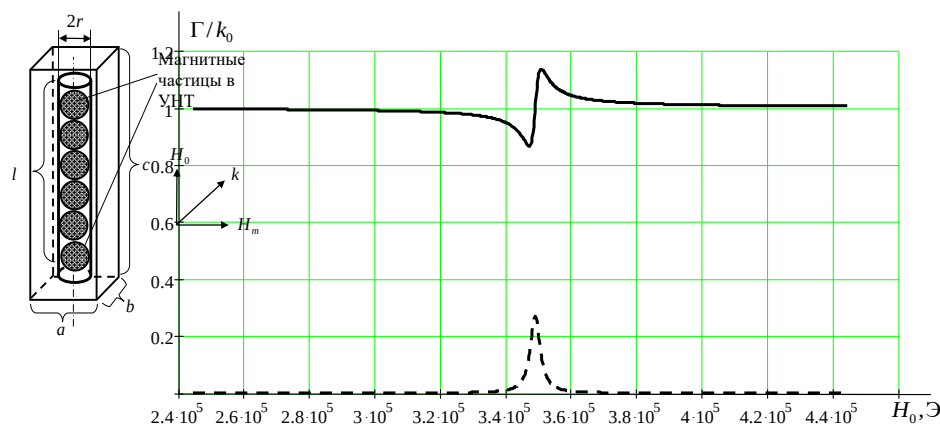


Рис. 6. Зависимости действительной и мнимой частей комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны в 3D-массиве МУНТ от поля подмагничивания H_0 : $N = 20$, $f = 1$ ТГц;
 — $\text{Re } \Gamma_0$; - - - $\text{Im } \Gamma_0$

Из результатов математического моделирования следует, что взаимодействия СВЧ и ТГц излучения с 3D-массивами МУНТ имеет резонансный характер и существенно зависит от направления и величины напряженности поля подмагничивания $\vec{H}_0$, взаимной ориентации векторов постоянного $\vec{H}_0$ и высокочастотного $\vec{H}_m$ полей, ориентации МУНТ, соотношения геометрических размеров нанозаключений и периода решетки, изменения числа инкапсулированных в УНТ МНЧ и формы магнитных нановключений, расстояния между МНЧ.

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

The co-author regarding the development of the computational method and the algorithm that implements it was Oleg A. Golovanov.

Список литературы

1. Вовченко Л. Л., Мацул Л. Ю., Олейник В. В. [и др.]. Резонансный характер взаимодействия многослойных углеродных нанотрубок с излучением миллиметрового диапазона волн // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии = Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies. 2011. Т. 9, № 4. С. 759–769.

2. Labunov V. A., Danilyuk A. L., Prudnikava A. L. [et al.]. Microwave absorption in nanocomposite material of magnetically functionalized carbon nanotubes // J. Appl. Phys. 2012. № 112. P. 024302.
3. Labunov V., Prudnikava A., Yanushkevich K. [et al.]. Synthesis and Properties of the Arrays of Magnetically Functionalized Carbon Nanotubes // Carbon Nanotubes Applications on Electron Devices. 2011. P. 71–105.
4. Mehdipour I. D., Rosca A. R. Sebak. Carbon nanotube composites for wideband millimeter-wave antenna applications // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2011. Vol. 59, № 10. P. 3572–3578.
5. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994.
6. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
7. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1421–1428.
8. Никольский, В. В. Проекционные методы в электродинамике : сб. науч.-метод. ст. по прикладной электродинамике. М. : Высш. шк., 1977. С. 4–23.
9. Голованов О. А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноведущих устройств СВЧ с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853–1863.
10. Макеева Г. С., Голованов О. А. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в наноструктурированных гиромангнитных средах методом автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1455–1459.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ
И ПОРОГОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
МАГНИТНЫХ НАНОСТРУКТУР НА ОСНОВЕ МАССИВОВ
МАГНИТНО-ФУНКЦИОНАЛИЗИРОВАННЫХ
УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК**

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. С помощью разработанного вычислительного алгоритма на основе многоуровневой рекомпозиции автономных блоков с каналами Флоке (ФАБ) проведено математическое моделирование дифракции основного типа волны на магнитной наноструктуре на основе 3D-массива магнитно-функционализированных УНТ (МУНТ) в волноводе в зависимости от напряженности поля подмагничивания в условиях ферромагнитного резонанса (ФМР) в миллиметровом диапазоне. С помощью разработанного специального вычислительного алгоритма определения точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла (уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица) рассчитаны пороги параметрических возбуждений безобменных магнитостатических волн и дипольно-обменных спиновых волн в периодическом 2D-массиве МУНТ в зависимости от значения бифуркационных параметров (амплитуды волны накачки и частоты).

Ключевые слова: многоуровневая рекомпозиция, магнитная наноструктура, точки бифуркации нелинейного оператора Максвелла, пороги параметрического возбуждения

**MATHEMATICAL MODELING OF DIFFRACTION AND PARAMETRIC
INSTABILITY THRESHOLDS OF MAGNETIC
NANOSTRUCTURES BASED ON ARRAYS OF MAGNETICALLY
FUNCTIONALIZED CARBON NANOTUBES**

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. Using a developed computational algorithm based on multi-level recombination of autonomous blocks with Floquet channels (FAB), mathematical modeling of the diffraction of fundamental mode on the magnetic nanostructure on a 3D array of magnetically functionalized CNTs (MCNTs) in a waveguide was

carried out depending on the bias field strength under ferromagnetic resonance (FMR) conditions in the millimeter range. Using a developed special computational algorithm for determining the bifurcation points of the nonlinear Maxwell operator (Maxwell's equations together with the Landau-Lifshitz equation), the thresholds of parametric excitation of exchangeless magnetostatic waves and dipole-exchange spin waves in a periodic 2D array of MCNTs were calculated depending on the value of the bifurcation parameters (amplitude pump waves and frequencies).

Keywords: multi-level recomposition, magnetic nanostructure, bifurcation points of the nonlinear Maxwell operator, thresholds of parametric excitation

Введение

Сложные нанокомпозиты на основе УНТ, содержащие массивы многостенных УНТ и инкапсулированные магнитные наночастицы (МНЧ) наполнителя [1–3], могут быть использованы для создания магнитоуправляемых устройств нового поколения различного назначения, так в сочетании с Si-МЭМС технологией для создания эффективных СВЧ экранов и элементов микросистем для обработки электромагнитных сигналов [1]. На основе массивов магнитнофункционализированных УНТ (МУНТ) могут быть созданы гибридные устройства, которые объединяет в своей конструкции ряд СВЧ устройств, например, переключатель, делитель мощности, аттенуатор, балансный мост [1], и широкодиапазонные микрополосковые антенны миллиметрового диапазона [3].

1. Математическая модель. Вычислительный алгоритм расчета матрицы рассеяния магнитной наноструктуры на основе 3D-массива МУНТ в волноводе

Построение математической модели дифракции и нелинейного взаимодействия электромагнитных волн с магнитными наноструктурами на основе массивов МУНТ базируется на решении краевых задач дифракции для уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} H(t) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t); \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} E(t) = - \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\vec{B}(t) = \vec{M}(t) + \mu_0 \vec{H}(t), \quad (3)$$

с соответствующими электродинамическими граничными условиями, дополненной уравнением Ландау – Лифшица [4]

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)) + \omega_r(\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)); \quad (4)$$

$$\vec{H}_{\text{эф}}(t) = \vec{H}(t) + \vec{H}_q(t); \quad (5)$$

$$\vec{H}_q(t) = q \nabla^2 \vec{M}(t). \quad (6)$$

Здесь $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{M}(t)$ – вектор намагниченности среды; $\vec{B}(t)$ – вектор магнитной индукции; $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$ – суммарное эффективное поле, включающее $\vec{H}_q(t)$ – поле обменного взаимодействия; ∇ – оператор Лапласа; ε – относительная диэлектрическая проницаемость; σ – объемная проводимость; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; γ – гиромагнитное отношение; $\omega_r = \alpha \gamma H_0$ – частота релаксации, α – параметр диссипации; χ_0 – статическая восприимчивость; q – константа обменного взаимодействия.

Согласно уравнению Ландау – Лифшица (4) движение вектора намагниченности определяется эффективным магнитным полем $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$, в котором находится МНЧ. Эффективное поле $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$ представляет собой сумму (5) поля анизотропии, локальных дипольных полей, поля обменного взаимодействия $\vec{H}_q(t)$.

Математическую модель для расчета матрицы рассеяния **R** неоднородности – магнитной наноструктуры на основе 3D-массива МУНТ в волноводе (рис. 1) строим на основе декомпозиционного подхода [5]. Область магнитной наноструктуры расчлняем условными границами на автономные блоки, содержащие МУНТ с МНЧ, и с каналами Флоке на гранях (МФАБ) [6]. Вычислительный алгоритм определения дескриптора (матрицы проводимости **Y**) МФАБ, разработан на основе решения краевой 3D-задачи дифракции проекционным методом Галеркина [7].

Ориентация УНТ
в нанокompозите

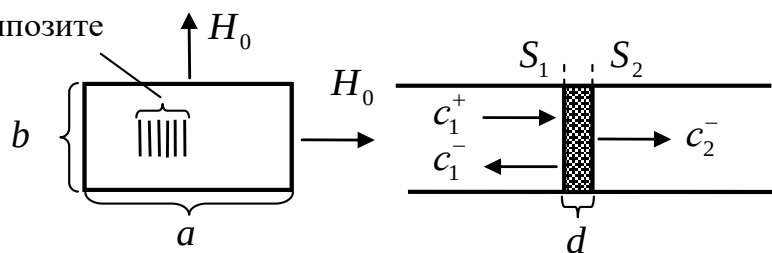


Рис. 1. Дифракции волны H_{10} на магнитной наноструктуре на основе 3D-массива МУНТ в волноводе: c_1^+, c_1^-, c_2^- – амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн типа H_{10} ; $\vec{H}_0$ – поле подмагничивания, S_1, S_2 – входные сечения; $a = 3,6$ мм; $b = 7,2$ мм; $d = 1,0$ мм.

В декомпозиционной схеме моделирования магнитной наноструктуры в волноводе (рис. 1) все МФАБ являются однотипными, что позволяет использовать вычислительный алгоритм многоуровневой рекомпозиции МФАБ, который существенно сокращает время расчетов на компьютере. Два однотипных МФАБ объединяем в один (при этом два виртуальных канала Флоке на гранях этого МФАБ преобразуются в один), получаем МФАБ с шестью каналами на гранях, и затем процесс повторяется. В результате многоуровневой рекомпозиции МФАБ и преобразования каналов Флоке на гранях получаем результирующий МФАБ (с двумя входными сечениями (гранями) S_1, S_2 (рис. 1) как модель неоднородности (магнитной наноструктуры) в волноводе. При этом на гранях исходных МФАБ, которые соприкасаются с боковой поверхностью прямоугольного металлического волновода (рис. 1), граничные условия типа «короткого замыкания» ($\vec{E}_\tau = 0$) не накладываются (для расчета матрицы проводимости $\mathbf{Y}$ они являются естественными).

Матрицу проводимости результирующего МФАБ, записанную в базисе собственных волн каналов Флоке, преобразуем в матрицу проводимости $\mathbf{Y}$ в базисе собственных волн прямоугольного волновода [8]. Затем, определив $\mathbf{Y}$, находим матрицу рассеяния $\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Y})$ [5]. Из матрицы рассеяния $\mathbf{R}$ магнитной наноструктуры в волноводе определяем амплитуды отраженной c_1^- и прошедшей c_2^- волн типа H_{10} (амплитуда c_1^+ падающей волны типа H_{10} принята равной $c_1^+ = 1$). Коэффициент прохождения определяется как $k_{np} = \frac{c_2^-}{c_1^+}$.

При помощи разработанного вычислительного алгоритма многоуровневой рекомпозиции МФАБ проведено математическое моделирование дифракции волны H_{10} на магнитной наноструктуре на основе 3D-массива МУНТ в волноводе в зависимости от направления и величины напряженности поля подмагничивания $\vec{H}_0$, ориентации УНТ, взаимной ориентации векторов постоянного $\vec{H}_0$ и высокочастотного $\vec{H}_m$ магнитных полей при различном числе инкапсулированных в УНТ МНЧ в условиях ФМР в миллиметровом диапазоне.

Результаты электродинамического расчета зависимостей относительного коэффициента прохождения d_m волны H_{10} через магнитную наноструктуру на основе 3D-массива МУНТ (рис. 1) от поля подмаг-

ничивания H_0 на частоте $f = 26$ ГГц при различном числе n МНЧ в УНТ представлены на рис. 2.

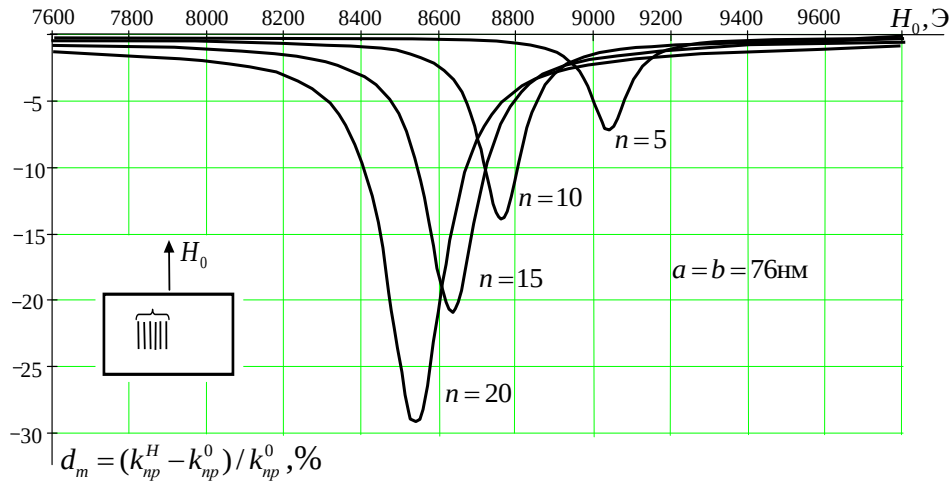


Рис. 2. Зависимости относительного коэффициента прохождения волны H_{10} через магнитную наноструктуру на основе 3D-массива МУНТ в волноводе от поля подмагничивания H_0 при различном числе n МНЧ в УНТ: $f = 26$ ГГц;

ориентация $\vec{H}_0$ вдоль оси УНТ

Поле подмагничивания $\vec{H}_0$ приложено вдоль оси МУНТ (рис. 1), при этом вектор $\vec{H}_0$ перпендикулярен вектору высокочастотного магнитного поля $\vec{H}_m$ волны типа H_{10} .

Магнитная наноструктура состоит из периодического 3D-массива МУНТ (радиус УНТ $2r = 25$ нм, длина УНТ $l = 500$ нм; толщина стенки $\Delta = 3$ нм; $\sigma = 2.5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\varepsilon = 62$) материал МНЧ $\text{Co}_{80}\text{Ni}_{20}$ ($4\pi M_s = 15356$ Гс, $\alpha = 0,005$, $\sigma = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $A = 1,5 \times 10^{-9}$ Э); радиус МНЧ $2R = 19$ нм; период решетки $a = b = 76$ нм, $c = 550$ нм.

Из графиков (рис. 2) следует, что положение и значения минимумов коэффициента прохождения d_m (максимумов резонансного поглощения) определяются эффективностью резонансного взаимодействия волны H_{10} с магнитной наноструктурой в волноводе на собственных частотах ФМР 3D-массива МУНТ, зависят от числа n МНЧ, инкапсулированных в УНТ, диаметра МНЧ, их пространственного распределения внутри УНТ, а также периода решетки.

Минимальный коэффициент прохождения d_m волны H_{10} через магнитную наноструктуру (при ориентации $\vec{H}_0$ вдоль оси УНТ) на частоте $f = 26$ ГГц наблюдается при наименьших значениях резонансного

магнитного поля $H_{0\text{рез}}$ при числе n МНЧ в УНТ равном $n=20$ (рис. 2,а). При этом собственная частота ФМР однородного типа прецессии намагниченности 3D-массива МУНТ, полностью заполненных ($n = 20$) МНЧ, изменяется в пределе до частоты ФМР 3D-решетки намагниченных вдоль оси магнитных нанопроволок с тем же периодом.

При уменьшении числа n МНЧ в УНТ при наличии сильной связи между МНЧ в решетке, обусловленной обменными силами, 3D-массив МУНТ, частично заполненных ($n = 5$) МНЧ, приближается по своим свойствам к квазисплошной ферромагнитной среде, при этом собственная частота ФМР (рис. 2, $n = 5$) однородного типа прецессии намагниченности 3D-массива МУНТ приближается к частоте ФМР ($H_{0\text{рез}} = 9248\text{Э}$) в сплошной гиромангнитной среде [4]: $\frac{\omega_0}{\gamma} = H_0$.

2. Моделирование порогов параметрической неустойчивости 2D-массивов МУНТ по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла

Рассмотрим задачу дифракции плоской однородной электромагнитной волны на периодическом 2D-массиве МУНТ (рис. 3). МУНТ находятся между сечениями S_1, S_2 МФАБ (рис. 3). Пусть на входное сечение S_1 падает TEM -волна (с амплитудой $c_{1(1)}^+(\omega)$ и частотой ω), распространяющаяся поперечно по отношению к направлению поля подмагничивания $\vec{H}_0$.

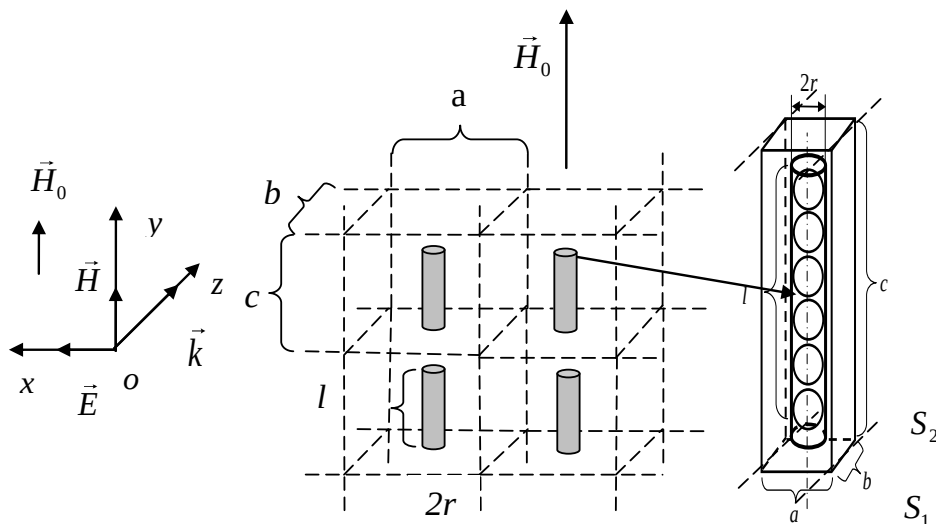


Рис. 3. Дифракция электромагнитной волны на периодическом 2D-массиве МУНТ: а) ориентация падающей TEM -волны с волновым вектором $\vec{k}$; б) 2D-массив МУНТ и направление поля подмагничивания $\vec{H}_0$; в) моделирование ячейки периодического 2D-массива как МФАБ: 1 – УНТ, 2 – МНЧ; a, b, c – геометрические размеры МФАБ

С помощью разработанного вычислительного алгоритма на основе МФАБ проведено решение нелинейной задачи дифракции для уравнений Максвелла (1–3) с электродинамическими граничными условиями, дополненных уравнением движения вектора намагниченности в ферромагнетике в форме Ландау-Лифшица (4) с учетом поля обменного взаимодействия.

При помощи разработанного специального вычислительного алгоритма [9] определения точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла (уравнений Максвелла (1), (2) совместно с уравнением Ландау-Лифшица (4)) проведено математическое моделирование неустойчивости процесса параметрического возбуждения безобменных магнитостатических волн (МСВ) и дипольно-обменных спиновых волн (СВ) в периодическом 2D-массиве МУНТ (рис. 3) в зависимости от значения бифуркационных параметров (амплитуды волны накачки $c_{1(1)}^+(\omega_H)$ и частоты ω).

Области неустойчивости при параметрическом возбуждении волн находятся вблизи значений частоты ω_0 , удовлетворяющих условию параметрического резонанса для осциллятора [4]:

$$\omega_0 = m\omega_H / 2, \text{ где } m = 1, 2, 3, \quad (7)$$

По точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла рассчитаны пороговые значения амплитуды $c_{1(1)}^+(\omega_H)$ волны накачки, при которых начинаются нелинейные процессы и возникает параметрическое возбуждение безобменных МСВ и дипольно-обменных СВ в периодическом 2D-массиве МУНТ при сокращении расстояний между МНЧ до длины обменного взаимодействия.

Расчетная схема показана на рис. 4. Ячейка периодического 2D-массива МУНТ находится в канале Флоке [10], на которую падает ТЕМ-волна накачки с амплитудой $c_{1(1)}^+(\omega_H)$ и частотой $\omega_H = 2\pi f_H$. Наблюдаем параметрическое возбуждение волн (в случае неустойчивости первого порядка $\omega_0 = \omega_H / 2$) на частоте $\omega_0 = 2\pi f_0$ ($f_0 = 13$ ГГц), равной половине частоты накачки (процесс Сула) [4].

На рис. 5 приведены результаты электродинамического расчета зависимости амплитуды $c_{1(1)}^+(\omega_H)$ электромагнитной волны накачки от нормированной частоты ω_0^2 / ω_H^2 (ω_0 – частота волны сигнала, ω_H – частота волны накачки), т. е. области неустойчивости при параметрическом возбуждении безобменных МСВ и дипольно-обменных СВ в периодическом 2D-массиве МУНТ при различных значениях напряженности поля подмагничивания H_0 в условиях ФМР.

В расчетах приняты следующие параметры 2D-массива МУНТ: радиус УНТ $2r = 25$ нм, длина УНТ $l = 500$ нм; толщина стенки $\Delta = 3$

нм; $\sigma = 2.5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\varepsilon = 62$; МНЧ $\text{Co}_{80}\text{Ni}_{20}$ ($4\pi M_s = 15356 \text{ Гс}$, $\alpha = 0,005$, $\sigma = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $A = 1,5 \times 10^{-9} \text{ Э}$); период решетки $a = b = 76 \text{ нм}$, $c = 550 \text{ нм}$ (рис. 3).

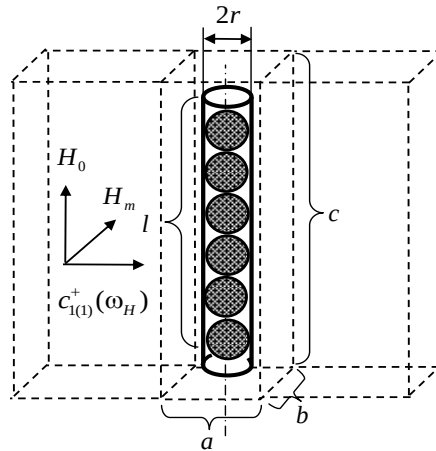


Рис. 4. Элементарная ячейка периодического 2D-массива МУНТ в канале Флоке: $\vec{H}_0$ – вектор напряженности поля подмагничивания; $\vec{H}_m$ – вектор напряженности магнитного поля электромагнитной волны

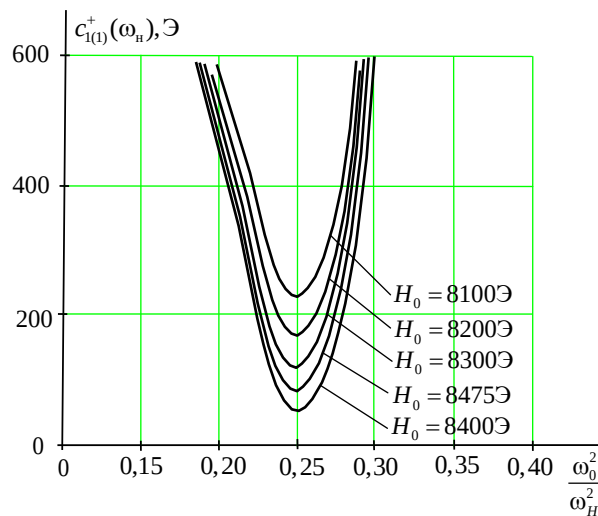


Рис. 5. Пороги параметрической неустойчивости периодического 2D-массива МУНТ $c_{1(l)}^+(\omega_H)$ – амплитуда волны накачки; ω_0 – частота волны сигнала ($f_0 = 13 \text{ ГГц}$); ω_H – частота волны накачки; H_0 – напряженность поля подмагничивания; $H_0 = 8475 \text{ Э}$ – ФМР

Качественный анализ устойчивости полученного численного решения проводился в соответствии с критерием Ляпунова [11], используя комплексные собственные числа λ_m линеаризованного оператора Максвелла [9]. Кривые на графике (рис. 5) разделяют области неста-

бильности и устойчивости полученного решения. В областях неустойчивости (эти области неустойчивости расположены над кривыми на рис. 5) некоторые из комплексных собственных чисел λ_m имеют положительные действительные части. В окрестностях точек на этих кривых происходит изменение знака действительной части комплексных собственных чисел λ_m . В областях устойчивости (эти области расположены под кривыми рис. 5) действительные части комплексных собственных чисел λ_m отрицательны.

Сплошные кривые (рис. 5) разделяют неустойчивый режим параметрического возбуждения МСВ и СВ от устойчивого режима параметрической регенерации. При переходе через бифуркационные значения параметра $c_{1(1)}^+(\omega_H)$ в точках бифуркации происходят скачкообразные переходы исследуемой нелинейной магнитной наносистемы – 2D-массива МУНТ – в режим параметрического возбуждения МСВ и СВ. Если амплитуда $c_{1(1)}^+(\omega_H)$ волны накачки превышает пороговое значение, то в нелинейной наносистеме МНЧ возникают МСВ и СВ колебания с частотами, удовлетворяющие условию (7).

Важным результатом математического моделирования является понижение порогов параметрической неустойчивости 2D-массива МУНТ при увеличении значения напряженности поля подмагничивания H_0 (рис. 5 кривые 1–3, 5) при приближении к ФМР. Однако в точке ФМР при значении, соответствующему собственной частоте однородного типа прецессии намагниченности ферритовой сферы [4] $\frac{\omega_0}{\gamma} = H_0$, наблюдается небольшое увеличение порога, что связано с возрастанием магнитных потерь при ФМР в 2D-массивах МУНТ.

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

The co-author regarding the development of the computational method and the algorithm that implements it was Oleg A. Golovanov.

Список литературы

1. Labunov V. A., Danilyuk A. L., Prudnikava A. L. [et al.]. Microwave absorption in nanocomposite material of magnetically functionalized carbon nanotubes // J. Appl. Phys. 2012. Vol. 112. P. 024302.
2. Labunov V., Prudnikava A., Yanushkevich K. [et al.]. Synthesis and Properties of the Arrays of Magnetically Functionalized Carbon Nanotubes // Carbon Nanotubes Applications on Electron Devices. 2011. August. P. 71–105.

3. Mehdipour A., Rosca I. D., Sebak A. R. Carbon nanotube composites for wideband millimeter-wave antenna applications // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2011. Vol. 59, № 10. P. 3572–3578.
4. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994.
5. Никольский В. В., Никольская Т. И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М. : Наука, 1983. 304 с.
6. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1421–1428.
7. Никольский В. В. Проекционные методы в электродинамике // Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. М. : Высш. шк., 1977. С. 4–23.
8. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М. : Наука, 1967.
9. Макеева Г. С., Голованов О. А. Численное исследование неустойчивостей волн и колебаний в нелинейных гиромангнитных структурах по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 1. С. 106–113.
10. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
11. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. ; Л., 1950. = Lyapunov A. M. The General Problem of the Stability of Motion, Gostehizdat, Moscow, 1950 (reprint of original thesis, 1892) ; Stability of Motion. Academic Press, New York, 1966.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ С УЧЕТОМ ФРАКТАЛЬНОСТИ ЗЕМЛИ

Альбина Николаевна Перекусихина¹,
Анастасия Александровна Пивкина²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹albinakruglova@yandex.ru

²nastyashaldaeva@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен вопрос моделирования геологических объектов с учетом их фрактальности. Приведен краткий обзор работ, посвященных вопросам гравитационной разведки. На примере губки Менгера построена прямая постановка задачи исследования гравиразведки с использованием фракталов.

Ключевые слова: фрактал, губка Менгера, гравиразведка, геологические объекты, моделирование

INVESTIGATION OF THE DIRECT PROBLEM OF GRAVITY EXPLORATION TAKING INTO ACCOUNT THE FRACTALITY OF THE EARTH

Albina N. Perekusikhina¹,
Anastasiya A. Pivkina²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹albinakruglova@yandex.ru

²nastyashaldaeva@mail.ru

Abstract. The issue of studying geological objects taking into account their fractality is considered. A brief overview of works devoted to the issues of gravitational reconnaissance is given. Based on the Menger sponge principle, a direct formulation of the problem of gravity survey research using fractals is constructed.

Keywords: fractal, Menger sponge, gravity survey, geological objects, modeling

1. Фрактальность геологических объектов

Геологическим объектам присуща упорядоченность, одной из типичных форм проявления которой является их фрактальная структура,

сохраняющая самоподобие при переходе от микроуровня к макроуровню, то есть масштабную инвариантность. Самоподобная иерархическая упорядоченная структура геологических сред повсеместно прослеживается и в данных петрофизики, и в аномальных полях, поэтому традиционные интерпретационные модели, не учитывающие самоподобия, представляются чрезмерно упрощенными, теряется фрактальная или мультифрактальная структура множества особых точек у функций, описывающих аномальные поля [1].

Модели фрактальных геологических объектов, как и любые модели вообще, являются идеализированными упрощениями реальных природных образований. Очевидно, в реальных структурах нет бесконечного самоподобия, в частности, природным фракталам присущ некоторый диапазон характерных размеров $l_{\min} < l < l_{\max}$, за пределами которого свойство самоподобия нарушается [2]. В геофизике ситуация $l < l_{\min}$ соответствует переходу на микроскопический уровень, а ситуация $l > l_{\max}$ подразумевает объекты, расстояния до которых существенно превышают размеры участка съемки. В отличие от природных, идеализированные, или регулярные фракталы обладают бесконечным самоподобием. Они оказываются инвариантными относительно растяжений, т.е. обладающими свойством дилатационной симметрии, предполагающей неизменность основных геометрических особенностей фрактала при изменении масштаба.

В качестве начальной базы моделирования фрактальных геологических объектов можно опираться на классические регулярные фракталы, при этом требуются не сами фракталы, а дополнения к ним. Дело в том, что классические примеры регулярных фракталов, такие как ковер Серпинского, губка Менгера и т.п. [2] строятся на основе однородного канторовского множества исключенных средних третей. В результате полученные фракталы характеризуются объемами (площадями), стремящимися в пределе к нулю, что не позволяет непосредственно использовать их для аппроксимации геологических объектов. Зато для аппроксимации вполне пригодны их дополнения, объемы (площади) которых в пределе стремятся к объемам (площадям) занятого этими фракталами пространства.

Для эффективного решения прямых и обратных задач гравитационной разведки большое значение имеют методы моделирования тел, возмущающих потенциальное и гравитационное поля Земли (возмущающих тел). В большинстве работ возмущающие тела моделируются набором простейших геометрических тел, так в работе [3] используются стержень, параллелепипед, шар, в работах [4, 5] моделирование проводится сфероидом. В работах [6–8] проведены исследования

фрактальности отдельных минералов и всей Земли в целом. Масштабирование геологических сред можно проследить в петрофизических данных, в аномальных полях [9] и т.д.

Стоит отметить, что большинство минералов пористые. Различают два типа пористости: пористость минералов и пористость жидкостей. Многочисленные исследования показали, что в обоих упомянутых случаях пористость имеет фрактальную структуру. Так авторы [6–11] утверждают, что песчаники имеют фрактальную структуру. Хансен и Скъельторп [7] исследовали фрактальную размерность D плоского образца песчаника и получили, что $D = 1,73$. Авторы в [12] определили фрактальную размерность двумерного разреза нефти. В работе [13] исследуется фрактальная размерность поверхностей пористых керамических материалов.

В монографии [8] в качестве математической модели пористости предлагается губка Менгера, построенная несколько иначе, чем стандартная конструкция. На основе данного исследования сформулируем прямую задачу гравиразведки с учетом фрактальности Земли.

2. Постановка прямой задачи гравиразведки с учетом фрактальности Земли

Рассмотрим геологическую залежь, представленную однородным телом D произвольной формы, находящимся в кубе $\Omega = [-a, a]^3$. Предполагая, что тело имеет фрактальную размерность $D_H < 3$, аппроксимируем его дополнением губки Менгера как модель пористости согласно теории в [8].

Построим префрактал n -го порядка (n -я итерация фрактала) для губки Менгера в кубе Ω . При построении первой итерации куб Ω разбивается на 27 равных кубиков со сторонами $r_1 = 2a/3$, и отбрасывается 7 центральных кубиков. При построении второй итерации каждый куб из оставшихся 20 кубиков разбивается на 27 равных кубиков со сторонами $2a/9$. В результате получаем 729 кубиков, из них 400 центральных кубиков (на каждый исходный кубик со стороной $2a/3$) отбрасываются. Повторив описанные операции n раз, получим n -й префрактал для губки Менгера.

Как отмечается в работе [10], в качестве модели геологических тел следует использовать не классические фракталы, а их дополнения по отношению к исходной области. Следовательно, геологические залежи моделируются набором кубов с разной длиной ребер (и разным размером). При моделировании сыпучих и жидких сред представляется более эффективным моделировать их уменьшенными копиями первой

итерации губки Менгера. В этом случае можно построить модель, используя не только классический фрактал, но и дополнение к нему.

Введем декартову трехмерную прямоугольную систему координат с направленной вниз осью z и началом координат, расположенным на поверхности Земли. Предположим, что тело D находится на достаточно большой глубине $z = H$ под поверхностью Земли. В качестве параметра H зафиксируем расстояние от поверхности Земли до средней точки (по вертикали) гравитирующего тела.

Пусть во введенной системе координат существует область $\Omega = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, H - a \leq z \leq H + a\}$, которой принадлежит тело D .

Введем кубы $\Delta_{ijk} = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$, $x_i = -a + ai/n$, $i = \overline{0, 1, \dots, 2n}$, $y_j = -a + aj/n$, $j = \overline{0, 1, \dots, 2n}$, $z_k = H - a + ak/n$, $k = \overline{0, 1, \dots, 2n}$, имеющие непустое пересечение с областью D .

В отмеченных кубах находим первую итерацию фрактала губки Менгера с длиной ребра a/n . Предположим, что тело моделируется первой итерацией фрактала. Обозначим построенную модель тела через D_n .

Для расчета возмущенного поля достаточно вычислить вертикальную составляющую гравитационного поля, создаваемую ячейкой Δ_{ijk} в точке $(x, y, 0)$.

Тогда ячейка Δ_{ijk} состоит из 20 кубов с ребрами длиной $a/3n$. Предполагая, что n и H достаточно велики, можно вычислить $\cos(\theta(x', y', z'))$, где $(x', y', z') \in \Delta_{ijk}$ постоянными в пределах ячейки, $\theta(x', y', z')$ – угол между радиусом-вектором MP ($M' = (x', y', z')$, $P(x, y, 0)$) и осью z .

Обозначим центр ячейки Δ_{ijk} через

$$o_{ijk} = (-a + a(i + 1/2)/n, -a + a(j + 1/2)/n, H - a + a(k + 1/2)/n).$$

Обозначим также θ_{ijk} угол между вектором $o_{ijk}P$ и осью z .

Таким образом, вертикальная составляющая силы тяжести, создаваемая клеткой Δ_{ijk} в этой точке, $P(x, y, 0)$ равна

$$\begin{aligned} dV_z(i, j, k) &= 20\gamma\rho(a/3n)^3 \cos(\theta_{ijk}) / (r(o_{ijk}, P))^2 = \\ &= \frac{20\gamma\rho a^3}{27n^3} \frac{z_k + z_{k+1}}{2} / (r(o_{ijk}, P))^3. \end{aligned}$$

Пусть γ – гравитационная постоянная, ρ – плотность тела. Тогда вертикальная составляющая силы тяжести, создаваемая возмущающим телом D в точке $(x, y, 0)$ равна

$$V_z(x, y, 0) = \sum_{i, j, k=0}^{2n-1} \frac{20\gamma\rho_{ijk}a^3}{27n^3} \left(\frac{z_k + z_{k+1}}{2} \right) / \left(r(o_{ijk}, P) \right)^3,$$

где ρ_{ijk} – плотность клеток.

Заключение

Приведен краткий обзор работ, посвященных вопросам гравитационной разведки. На примере губки Менгера построена прямая постановка задачи исследования гравиразведки с использованием фракталов. В дальнейших работах авторы планируют исследовать зависимость результатов от выбранной модели фрактала.

Список литературы

1. Блох Ю. И. Проблема адекватности интерпретационных моделей в гавиразведке и магниторазведке // Геофизический вестник. 2004. № 6. С. 10–15.
2. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 128 с.
3. Гравитационная разведка / под ред. Е. А. Мудрецов. М. : Наука, 1981.
4. Степанова И. Е. Об одном устойчивом методе восстановления эллипсоидов // Физика Земли. 2001. № 1. С. 101–106.
5. Сизиков В. С., Голов И. Н. Моделирование месторождений сфероидными // Физика Земли. 2009. № 3. С. 83–96.
6. Katz A. J., Thompson A. H. Fractal Sandstone Pores: Implications for Conductivity and Pore Formation // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P.1325–1328.
7. Hansen J. P., Skjeltorp A. T. Fractal pore space and rock permeability implications // Phys Rev B Condens Matter. 1988. Vol. 38 (4). P. 2635–2638. doi: 10.1103/physrevb.38.2635
8. Тёркотт Д. Фракталы и хаос в геологии и геофизике. Кембридж : Изд-во Кембриджского ун-та, 1992.
9. Утемов Е. В. Фликкер-шумовая структура энергетических спектров природных магнитных аномалий // Мониторинг геологической среды: активные эндогенные и экзогенные процессы. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2000.
10. Потапов А. А., Гуляев Ю. В., Никитов С. А. [и др.]. Современные методы обработки изображений / под ред. А. А. Потапова. М. : Физматлит, 2008.

11. Thompson A. H., Katz A. J., Krohn C. E. The microgeometry and transport properties of sedimentary rock // *Advances in Physics*. 1987. Vol. 36 (5). P. 625–694. doi: 10.1080/00018738700101062
12. Brakensiek D. L., Rawls W. J., Logsdon S. D., Edwards W. M. Fractal Description of Macroporosity // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1992. Vol. 56. P. 1721–1723.
13. Кульков С. Н., Томаш Я., Буякова С. П. Фрактальная размерность поверхностей пористых керамических материалов // *Письма технической физики*. 2006. Т. 32, вып. 2. С. 51–55.

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВУЧЕСТИ В СРЕДЕ UNREAL ENGINE 5

Максим Аркадьевич Писарев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

Pisarevmx@gmail.com

Аннотация. Рассматривается высокопроизводительный вариант реализации физики плавучести с использованием преобразования Фурье. Освещаются особенности расчета волн на центральном процессоре параллельно с видеокартой. Демонстрируется практическая реализация на языке C++ в среде Unreal Engine.

Ключевые слова: плавучесть, жидкость, комплексные значения, спектр, быстрое преобразование Фурье, параллельные вычисления, VR, Unreal

FEATURES OF WATER MODEL IMPLEMENTATION IN VIRTUAL REALITY SYSTEMS BASED ON UNREAL ENGINE

Maxim A. Pisarev

Penza State University, Penza, Russia

Pisarevmx@gmail.com

Abstract. The article explores a high-performance implementation of buoyancy physics using the Fourier transform. The article discusses techniques for calculating waves on the central processor (CPU) in parallel with the video card (GPU). A practical implementation in C++ in the Unreal Engine environment is demonstrated.

Keywords: Buoyancy, liquid, complex values, spectrum, fast Fourier transform, parallel computing, VR, Unreal

Симуляция различного рода физических явлений в сценах VR положительно влияет на уровень доверия к виртуальной реальности и часто используется как часть игрового процесса, в том числе и медицинских симуляторов [1]. Одной из важных областей для разработчиков является симуляция жидкостей, а также явления плавучести. Такие симуляции обычно связаны с расчетом большого количества значений в реальном времени. Особое внимание ученых уделяется высокому уровню производительности подобных решений [2]. Для того что бы объект плавал нам нужно знать высоту поверхности жидкости в заданной точке. Сложность расчетов будет зависеть от сложности самой

реализации модели поверхности воды. В данной статье рассмотрим вариант – динамической поверхности.

Представим, что у нас есть N точек, для которых мы хотим рассчитать M волн, количество операций на кадр пропорционально N умноженному на M , поскольку мы вычисляем волну в каждой точке. Чтобы получить реалистичную водную поверхность нам необходимо как можно более большое значение M вплоть до тысяч. Расчет $O(NM)$ синус в вершинном шейдере крайне негативным образом влияет на производительность [3]. Распространённым решением этой проблемы является дискретное преобразование Фурье.

Преобразование Фурье – это математическая операция, которая позволяет переходить между пространственным представлением и частотной областью. Дискретное преобразование Фурье (1) работает также как и обычное преобразование, но для дискретных функций.

$$F_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{i2\pi \frac{m}{N}n} \quad (1)$$

Сумма волн будет обратным ДПФ если верно следующее: количество рассчитываемых точек волн равно количеству волн, координаты точек $x = \frac{m}{N}L$ и волновые числа $k = \frac{2\pi n}{L}$ принадлежат регулярным сеткам (таким образом сократим масштаб длин волн).

Для начала сгенерируем сетку значений, с парами случайных чисел в красном и зеленых каналах. При изменении параметров поверхности нам нужно рассчитывать сами волновые векторы, соответствующие им частоты и стационарный спектр. Воспользуемся формулой Эйлера (2):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (2)$$

Заменяем синус косинус на сложную экспоненту. Также заменим амплитуду и фазу на единичную комплексную амплитуду (3).

$$\begin{aligned} A \sin(k * x + \omega t + \varphi) &\rightarrow A e^{i(kx + \omega t + \varphi)} \\ &\rightarrow A e^{i\varphi} e^{i(kx + \omega t)} \rightarrow h e^{i(kx + \omega t)} \end{aligned} \quad (3)$$

В таком случае вертикальное смещение поверхности волн будет выглядеть так (4):

$$\eta(x, t) = \sum h_0(k) e^{i(kx + \omega t)} \quad (4)$$

Рассчитаем сумму для N точек и N волн (5).

$$\eta_n(t) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h_{0m} e^{i(k_m x_n + \omega t)} \quad (5)$$

Сдвинем зависящую от времени часть в амплитуды (6).

$$\eta_n(t) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h_m(t) e^{ik_m x_n} \quad (6)$$

Подставим значения координат и волновых чисел (7)

$$\begin{aligned} \eta_n(t) &= \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h_m(t) e^{i \frac{2\pi m}{L} \frac{n}{N} L}, \\ \eta_n(t) &= \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h_m(t) e^{2\pi i \frac{m}{N} n} \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь сумма волн выглядит как обратное ДПФ за исключением пределов суммирования. Применение быстрого преобразования Фурье (БПФ) позволит сократить сложность исполнения алгоритма от $O(N^2)$, до $O(N \log N)$.

Назначим параметры для этих волн (8). Волновые векторы определяются пространственной сеткой, остальные параметры будем выражать как функции $\omega(k)$, $h_0(k)$. Математические волны могут иметь любую комбинацию волнового числа и частоты. В реальных условиях эти параметры связаны дисперсионным отношением, эти отношения различны для разных типов волн.

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1 + i\xi_2) \sqrt{2S(\omega)D(\theta, \omega) \frac{d\omega(k)}{dk} \frac{1}{k} \Delta k_x \Delta k_z} \quad (8)$$

При этом $\xi_1, i\xi_2$ – независимые случайные величины из распределения. Вторая часть уравнения – это квадратный корень из спектра $2S(\omega)D(\theta, \omega)$ и $\frac{d\omega(k)}{dk} \frac{1}{k} \Delta k_x \Delta k_z$ – получаемая в результате дискретизации и преобразования спектра в первое волновое число. Добавим к спектру временной коэффициент (9). Это гарантирует что результат БПФ будет действительным числом.

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{h}_0(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t} + \mathbf{h}_0(-\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (9)$$

где, $h_0(k)$ комплексная амплитуда волнового вектора k , $i\omega(k)$ – показатель начальной угловой частоты от k , t – время, $h_0(-k)$ сопряженная комплексная амплитуда волнового вектора k , $-i\omega(k)$ – сопряженный показатель начальной угловой частоты от k .

Для использования полученного смещения в расчётах плавучести нужно перенести его на сторону процессора. В зависимости от поставленной задачи применяются несколько способов. Для получения точных значений используется обратное чтение видеопамати. Подобная

операция приводит к временной остановке конвейера процессора. Существуют асинхронные способы для обратного чтения памяти, но они приводят к задержке считанных значений и не отличаются высокой производительностью.

Часто применяемым решением является повторение расчётов БПФ на ЦПУ в уменьшенном разрешении и только для самого большого каскада [4]. При построении такой логики необходимо учесть описанные ниже факторы:

1. Генерация случайных чисел. Начальные значения волн для CPU и GPU должны совпадать иначе мы получим разные сетки высот. Для получения одинакового начального значения необходимо использовать детерминированную версию *Seeded Float Random* с одинаковым значением *Seed*. Для генерации одинакового случайного значения на CPU используются *DispatchThreadId* на GPU и *IterationIndices*.

2. Точность смещения. Чтобы добиться точного смещения в определенном месте, графический процессор и ЦП должны работать с одинакового размера сетками. При снижении ее разрешения возникает погрешность, но для случаев использования с плавающими объектами эта погрешность приемлема.

Стоит иметь в виду, что получение фактической высоты поверхности в определенной точке не является тривиальной задачей. Проблема в том, что у нас есть только данные смещений, а не поле высот. Если мы в какой-то момент возьмем высоту в некоторой точке, она на самом деле вернет высоту в сдвинутой точке. Одним из решений данной проблемы является повторное семплирование смещения. Отступаем от значений в интересующей нас точке, на величину ее горизонтального смещения, повторяем тоже самое в получившейся точке. Обычно двух или трех итераций хватает для получения точных значений.

3. Оптимизация. При практическом решении задачи необходимо использовать параллелизм задач и векторный параллелизм. Расчета в один поток большого количества значений одновременно приведет к росту нагрузки на процессор значительно выше допустимых значений. В Unreal есть довольно простые механизмы параллелизма для C++. *ParallelFor2* обрабатывает параллелизм задач, а *ISPC1* векторный параллелизм.

4. На основе применения быстрого преобразования Фурье (БПФ) была разработана симуляция поверхности жидкости в среде Unreal Engine 5 [3]. Далее был выполнен повторный расчет на центральном процессоре (ЦПУ) с использованием языка программирования C++. Размер сетки был уменьшен до 32×32, что при учете описанных выше факторов позволило достичь приемлемой погрешности при

незначительной нагрузке на процессор. На рисунке 1 приведены значения времени расчета точек при соответствующем количестве вызовов процессора.

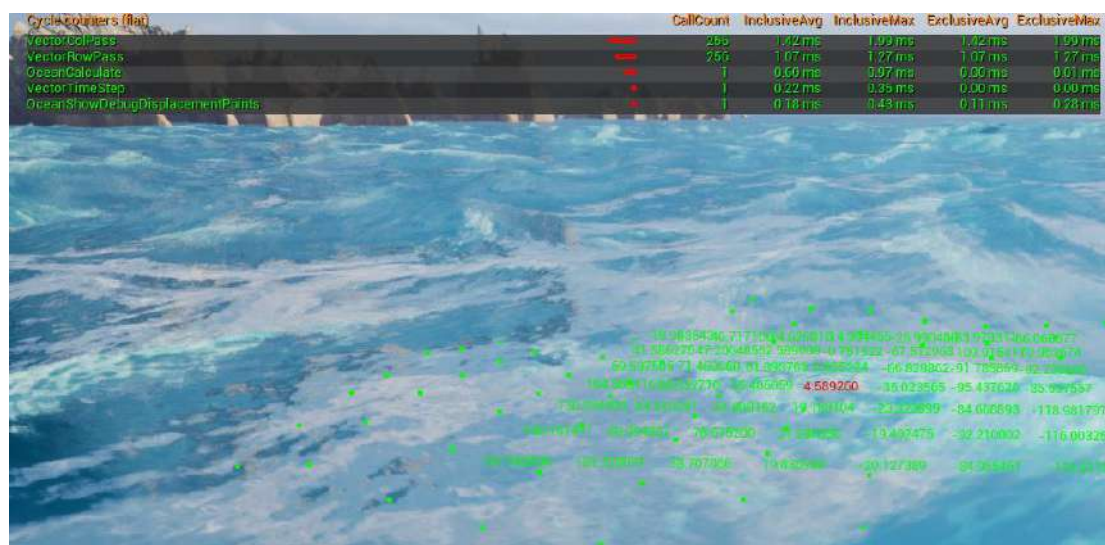


Рис. 1. Результат работы симуляции

Полученные значения подтверждают обоснованность выбора данной методики для использования в средах виртуальной реальности.

Список литературы

1. Ivaschenko A., Gorbachenko N., Kolsanov A. [et al.]. 3D scene modeling in human anatomy simulators // European Simulation and Modelling Conference 2016 (ESM 2016) (Las Palmas, 26–28 October 2016). Las Palmas, 2016. Vol. 30. P. 307–314.
2. Kosnikov Y. N., Kuzmin A. V., Thai Ho H. Morphing of spatial objects in real time with interpolation by functions of radial and orthogonal basis // Conference Series (Tomsk, 17–20 January 2018). Tomsk, 2018. P. 032066. doi: 10.1088/1742-6596/1015/3/032066
3. Tessendorf J. Simulating Ocean Water // Copyright 192004. Jerry Tessendorf. P. 1–26. URL: https://people.computing.clemson.edu/~jtessen/reports/papers_files/coursenotes 2004.pdf (date of the application: 01.03.24).
4. Finch M. Effective Water Simulation from Physical. Models // GPU Gems, Addison-Wesley, 2004. P. 5–29.

ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ В ДИНАМИЧНЫХ СРЕДАХ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

Татьяна Антоновна Чернышова¹,
Анна Ананьевна Лемперт², Та Вьет Чан³

^{1,2,3}Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

¹ta.chernyshovs@gmail.com, ²lempert@icc.ru, ³info@istu.edu

Аннотация. Рассматривается задача построения оптимальных маршрутов для транспортных средств в динамически изменяющейся среде, что актуально в условиях роста логистических затрат и необходимости минимизации времени доставки. Исследование отличается применением алгоритмов, учитывающих изменение среды и динамические препятствия. Применяется оптико-геометрический подход, аналогичный распространению света в неоднородной среде, для минимизации интегрального функционала. Разработаны и реализованы два численных алгоритма: упрощенный, быстро находящий допустимый маршрут, и полный, обеспечивающий глобальную оптимальность за счет пошагового обновления волнового фронта. Проведенный вычислительный эксперимент подтвердил эффективность предложенных алгоритмов в условиях изменяющейся среды.

Ключевые слова: оптико-геометрический подход, маршрутизация транспортных средств, уравнение Эйконала, динамическая среда, перепланирование маршрутов, волновой фронт, численные методы, оптимизация маршрутов

TRAJECTORY PLANNING FOR MOVING OBJECTS IN DYNAMIC ENVIRONMENTS USING EIKONAL EQUATION SOLUTIONS

Tatyana A. Chernyshova¹, Anna A. Lempert²,
Ta Viet Chan³

^{1,2,3}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

¹ta.chernyshovs@gmail.com, ²lempert@icc.ru, ³info@istu.edu

Abstract. The problem of constructing optimal routes for vehicles in a dynamically changing environment is addressed, which is relevant in the context of rising logistics costs and the need to minimize delivery time. The study is distinguished by the use of algorithms that account for environmental changes and dynamic obstacles. An optical-geometric approach, analogous to light propagation in a heterogeneous medium, is applied to minimize the integral functional. Two numerical

algorithms have been developed and implemented: a simplified one, quickly finding an acceptable route, and a complete one, ensuring global optimality through step-by-step wavefront updating. The computational experiment conducted confirmed the effectiveness of the proposed algorithms in a changing environment.

Keywords: optical-geometric approach, vehicle routing, eikonal equation, dynamic environment, route replanning, wavefront, numerical methods, route optimization

Введение

В современных условиях проблема построения оптимальных маршрутов для транспортных средств в динамически изменяющейся среде является крайне актуальной. Растущие затраты на логистику делают минимизацию времени доставки критически важной задачей. Качественное и своевременное решение таких задач в конечном итоге значительно снижает затраты на перевозку, сокращает сроки доставки и, как следствие, повышает эффективность работы всей транспортной системы.

Весь спектр задач построения маршрутов можно условно разделить на две категории: маршрутизация на графах и непрерывная маршрутизация. Первую категорию составляют задачи типа коммивояжера. Во вторую категорию входят задачи прокладки маршрутов с непрерывным числом возможных траекторий (воздушных, наземных или морских) [1].

Традиционные задачи маршрутизации концентрируются на расстояниях между пунктами и ограничениях транспортных средств, такие как скорость, расход топлива и другие. Методы решения таких задач основаны на теории графов, таких как алгоритмы Дейкстры [2] и A^* [3], они не учитывают изменяющиеся условия и динамические препятствия. При этом современные исследования уже включают оптимизацию маршрутов с учётом прогноза погодных условий и динамические версии алгоритмов, которые адаптируются к изменяющейся среде. Например, динамическая версия алгоритма A^* учитывает изменения карты и опасные зоны.

Другие методы, например, метод, основанный на быстром исследовании случайного дерева (Rapidly Exploring Random Tree, RRT), используются для навигации мобильных роботов и обхода новых препятствий, хотя они не всегда гарантируют оптимальность маршрута [4]. Двухуровневые подходы применяются для автономных подводных роботов, которые должны обследовать множество целей с учётом необходимости подзарядки.

Задачи построения оптимальных маршрутов в динамической среде с изменяющимися условиями остаются актуальными и требуют

оптимизации на каждом этапе транспортной логистики. Цель – найти кратчайший маршрут между двумя точками, обходя барьеры и динамические препятствия.

В данной статье рассматривается использование решений уравнения эйконала для построения маршрутов в таких условиях. Предлагаемые алгоритмы основаны на оптико-геометрическом подходе, используя аналогию с распространением света в неоднородной среде для нахождения минимума интегрального функционала [5].

Постановка задачи

Рассмотрим область $X \subset \mathbb{R}^2$, в которой определены две точки: $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$. В каждой точке $(x, y) \in X$ известна функция $f(x) = f(t, x, y) \geq 0$, описывающая мгновенную скорость движения. Если $f(t, x, y) = 0$, то перемещение через эту точку невозможно. Функция $f(t, x, y)$ является кусочно непрерывной по пространственным переменным x, y , а по времени t – кусочно постоянной с известными моментами изменения t_i , где $i = 1, \dots, n$.

Тогда задача отыскания маршрута, на прохождение которого требуется наименьшее время, заключается в минимизации следующего функционала:

$$\int_G \frac{dG}{f(t, x, y)} \rightarrow \min_{G \in G(A, B)},$$

где $G(A, B)$ – множество непрерывных кривых, соединяющих точки A и B .

С точки зрения геометрической оптики, данный интеграл представляет собой время, за которое свет, исходящий из точки A , достигает точки B , перемещаясь через оптически неоднородную среду. Согласно принципу Гюйгенса, любую точку области X , которую уже достиг свет, можно считать новым самостоятельным источником света. Таким образом, выпустив световую волну из точки A , можно проследить за её траекторией движения и определить какой фотон первым достигнет точки B . Затем, проследив путь этого фотона в обратном направлении, можно восстановить его траекторию, которая и будет искомым маршрутом.

Так как среда изменяется со временем, ключевым моментом является построение фронта световой волны в моменты изменения состояния среды. Эти фронты вычисляются решением уравнения эйконала, которое представляет собой нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\|\nabla u(x)\| = \frac{1}{f(x)},$$

где ∇ – оператор градиента, а $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Линии уровня функции $u(x) = \text{const}$ задают положения фронта волны в различные моменты времени.

Описание алгоритмов

Для решения поставленной задачи предлагаются два вычислительных алгоритма. Первый (упрощенный) алгоритм фокусируется на быстром нахождении допустимого маршрута в динамически изменяющейся среде, не гарантируя при этом глобальной оптимальности решения. Идея основывается на методе прицеливания и заключается в следующем. Процесс начинается с решения уравнения эйконала с источником в начальной точке A и функцией скорости $f(x) \equiv f(0, x, y)$, т.е. изменения среды пока не учитываются, и определяют фронт, который проходит через точку B . Если время t_B достижения точки B не превосходит t_1 – это означает, что маршрут будет пройден раньше, чем среда изменится, соответственно, маршрут будет оптимальным. В противном случае, на построенном маршруте определим точку A_1 , которую достигнет световая волна за время t_1 . На следующем этапе уравнение эйконала решается уже с новым источником в точке A_1 и функцией скорости $f(x) \equiv f(t_1, x, y)$. Процесс продолжается, повторяя шаги 2 и 3, до тех пор, пока волновой фронт не достигнет конечной точки B .

Основным преимуществом алгоритма является то, что уравнение эйконала необходимо решать только для точечного источника, что упрощает вычислительную реализацию. К недостаткам данного алгоритма можно отнести отсутствие гарантии глобальной оптимальности, так как каждый этап решается отдельно, и оптимальные пути для коротких отрезков времени могут не совпадать с глобально оптимальным маршрутом. Кроме того, данный алгоритм может заикливаться при быстро изменяющейся среде.

Второй (полный) алгоритм заключается в поэтапном решении уравнения эйконала с обновлением волнового фронта на каждом шаге. Основная идея заключается в том, чтобы использовать аналогию с распространением света, где каждая точка, до которой дошла волна, становится новым источником света. На первом этапе также решается уравнение эйконала с источником в точке является $A(x_a, y_a)$, и $f(x) \equiv f(0, x, y)$. В результате определяется фронт волны $t_1 = u(x)$. На втором этапе в качестве нового источника используется уже

найденный фронт. Затем решается уравнение эйконала с новой функцией скорости $f(x) \equiv f(t_1, x, y)$. Этот процесс повторяется, каждый раз обновляя фронт и функцию скорости, до тех пор, пока фронт волновой не достигнет конечной точки $B(x_b, y_b)$. Когда фронт волновой достиг точки B , маршрут восстанавливается обратным движением от точки $B(x_b, y_b)$ к начальной точке $A(x_a, y_a)$.

К основным преимуществам данного алгоритма относится нахождение глобально оптимального маршрута, так как учитываются все возможные пути, а также его бессеточность. При этом необходимо отметить и недостатки: это вычислительная затратность, так как решение уравнения эйконала с распределенным источником требует значительных вычислительных ресурсов.

Выбор алгоритма зависит от конкретных условий задачи. Если важна оптимальность маршрута, то полный алгоритм предпочтительнее, так как он гарантирует нахождение глобального решения. Он подходит для задач, где точность имеют решающее значение, несмотря на высокую вычислительную сложность. Если же важна скорость и адаптивность, то более подходящим становится упрощенный алгоритм, так как он быстрее находит допустимые маршруты и легче адаптируется к изменениям в среде. Он подходит для задач, где время вычислений ограничено, и допустимы приближенные решения.

Пример

Проиллюстрируем работу алгоритма на следующем примере. Рассматривается задача о поиске маршруте движения объекта из начальной точки $A_1(0; 0)$ до целевой точки $A(50; 50)$ в однородной среде с одним подвижным барьером, т.е.

$$f(t, x, y) = \begin{cases} 1; (x, y) \notin H(t) \\ 0; (x, y) \in H(t) \end{cases}'$$

где $H(t)$ – множество барьеров.

Пусть имеются 4 постоянных барьера $h_i, i = \overline{1,4}$ и движущееся препятствие $V(t)$ (см. рис. 1). Барьер $V(t)$ имеет квадратную форму и движется слева направо: $V(t) = \{(x, y): |x - 0,6t - 2.5| \leq 2.5; 35 \leq y \leq 40\}$.

Применяется упрощенный алгоритм для построения маршрута, интервал изменения выбран $\Delta t = 5$ (секунд).

На интервале времени 0–35, объект движется по оптимальному маршруту, который учитывает обход барьеров h_1, h_2, h_4 . В момент $t = 35$, объект приходит в точку $A_2(18; 25)$, а барьер $V(t)$ – в точку $V_2(23.5; 37.5)$, и продолжает движение вперед (рис. 1а). Иначе говоря, пока движущееся препятствие не мешает объекту.

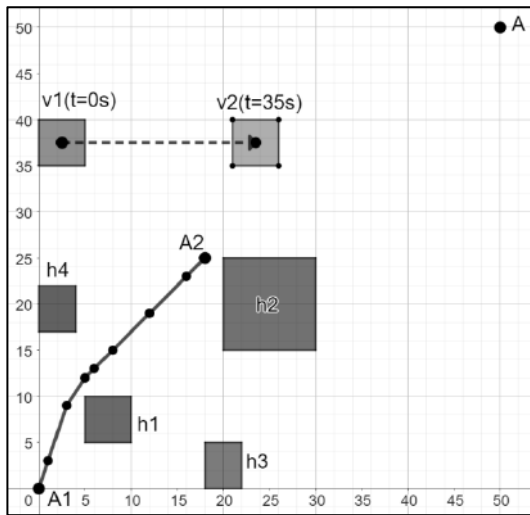


Рис. 1а. Маршрут на интервале времени 0–35 (секунд)

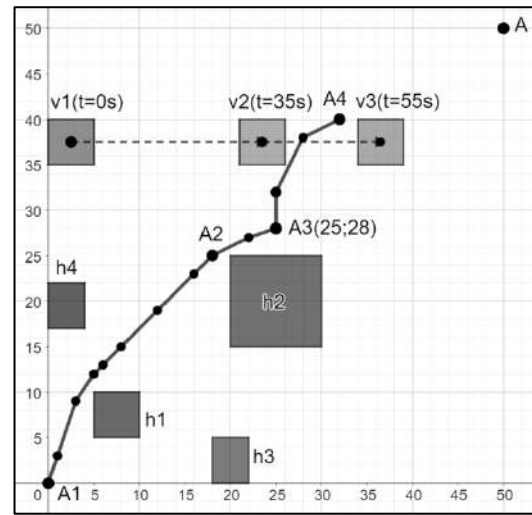


Рис. 1б. Маршрут движение на интервале времени 35–55 (секунд)

В интервале времени 35–55, барьер $V(t)$ проходит точку $V_3(35.5; 37.5)$, в момент $t = 55$. Объект движется из точки A_2 до точки $A_4(32; 40)$. Если объект продолжит движение по первоначальному маршруту, то произойдет столкновение, поэтому происходит смена траектории движения (рис. 1,б).

В интервале времени 55–75, барьер $V(t)$ снова не мешает движению объекта, который продолжает движение по новому кратчайшему маршруту (рис. 2).

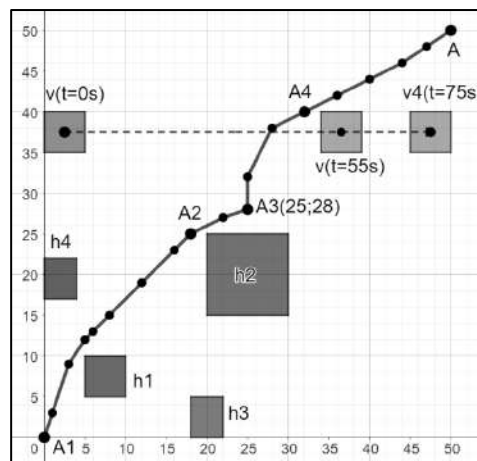


Рис. 2. Оптимальный маршрут без столкновений.

Отметим, что, помимо приведенного иллюстративного примера, был проведен обширный вычислительный эксперимент, включающий решение задач как с несколькими подвижными препятствиями, так и с изменяющимися свойствами среды. Во всех задачах упрощенный алгоритм показал высокую скорость работы, а полный – нахождение оптимального решения.

Заключение

В работе предложены два численных алгоритма маршрутизации. Особенностью исследования является использование минимального времени, а не традиционного пройденного расстояния, в качестве критерия оптимальности маршрута, что актуально для ряда практических приложений.

На следующем этапе планируется развитие алгоритмов для учета размеров движущихся объектов, расширяя класс решаемых задач. Их дальнейшее развитие может привести к созданию новых эффективных инструментов моделирования, оптимизации и принятия решений в задачах наукоемкого проектирования и управления сложными динамическими системами.

Список литературы

1. Wang C. N., Dang T. T., Nguyen N. A. Advanced Processes Optimization in Logistics and Supply Chain Management // Processes. 2021. Vol. 9, № 12. P. 2345.
2. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische mathematic. 1959. Vol. 1, № 1. P. 269–271.
3. Matthews J. Basic A* pathfinding made simple, AI Game Programming Wisdom. Boston : Charles River Media, 2002. P. 105–113.
4. Paudel A. Motion Primitives based Path Planning with Rapidly-exploring Random Tree // arXiv. 2022. Vol. 2203. P. 03092.
5. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 50–57.

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ СКОРОСТИ СТЕФАНОВСКОГО ПОТОКА В ПРОЦЕССЕ ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КАТАЛИЗАТОРА ГИДРООЧИСТКИ

**Ольга Сергеевна Язовцева¹, Ирек Марсович Губайдуллин²,
Анна Алексеевна Кокулова³, Лев Александрович Сухарев⁴**

¹Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт нефтехимии и катализа Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

^{3,4}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹kurinaos@gmail.com, ²irekmars@mail.ru

³universitet.po4ta@yandex.ru, ⁴suharev_la@mail.ru

Аннотация. Представлена оценка величины скорости стефановского потока в математической модели процесса окислительной регенерации катализатора гидроочистки на основе численного исследования модели регенерации цилиндрического зерна катализатора. В уравнения материального баланса модели включен член, отвечающий вынужденному конвективному переносу – стефановскому потоку. На основе численных расчетов оценена скорость стефановского потока относительно скорости химических превращений и процесса диффузии.

Ключевые слова: окислительная регенерация, материальный баланс, стефановский поток, математическое моделирование

Финансирование: работа О. С. Язовцевой выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 19-71-30012. URL: <https://rscf.ru/en/project/23-71-33002/>

Работа И. М. Губайдуллина выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема FMRS-2022-0078).

THE ESTIMATION OF THE STEFAN FLOW VELOCITY IN THE PROCESS OF OXIDATIVE REGENERATION OF THE HYDROTREATING CATALYST

**Olga S. Yazovtseva¹, Irek M. Gubaydullin²,
Anna A. Kokulova³, Lev A. Sukharev⁴**

¹Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

²Institute of Petrochemistry and Catalysis of the RAS, UGNTU, Ufa, Russia

^{3,4}National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹kurinaos@gmail.com, ²irekmars@mail.ru

³universitet.po4ta@yandex.ru, ⁴suharev_la@mail.ru

Abstract. The article presents an estimate of the Stefan flow velocity in a mathematical model of the oxidative regeneration process of a hydrotreating catalyst based on a numerical study of the regeneration model of a cylindrical catalyst grain. The article presents an estimate of the Stefan flow velocity in the process of the hydrotreating catalyst oxidative regeneration. The model is based on a mathematical model of a cylindrical catalyst grain. The equations of the material balance in the model include a term corresponding to forced convective transport – the Stefan flow. The velocity of the Stefan flow relative to the rate of chemical transformations and the diffusion process is estimated by the numerical calculations.

Keywords: oxidative regeneration, material balance, Stefan flow, mathematical modeling

Financing: the work of Yazovtseva O. S. was supported by the Russian Science Foundation under grant № 19-71-30012, <https://rscf.ru/en/project/23-71-33002/>

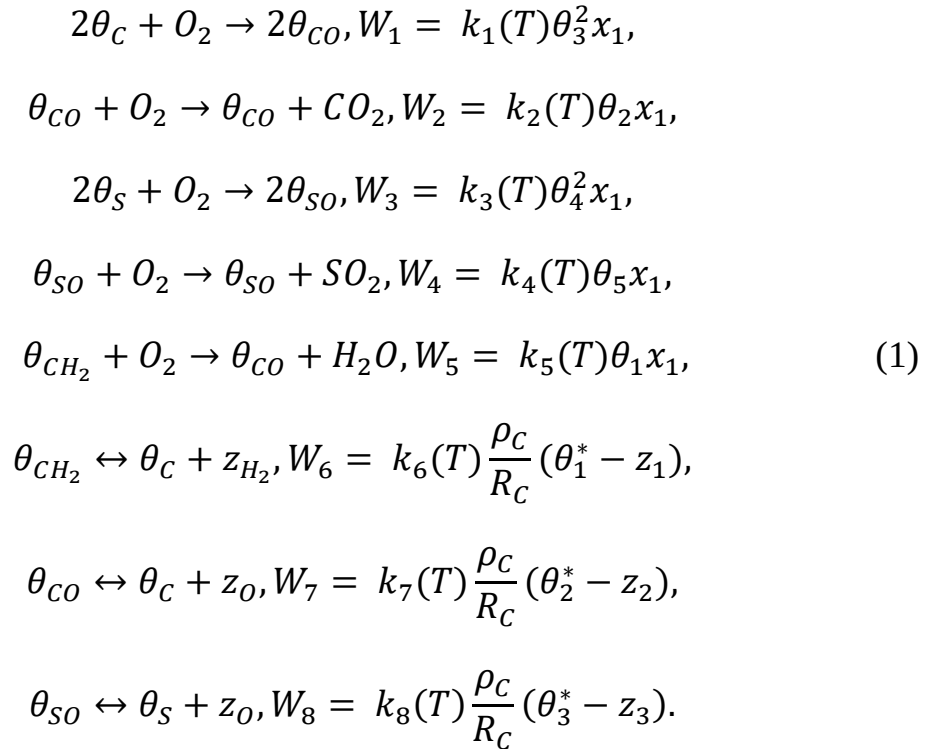
The work of I. M. Gubaydullin was supported by the state task of the Institute of Petrochemistry and Catalysis of the Russian Academy of Sciences (theme № FMRS-2022-0078).

Разработка математических моделей физической химии – нетривиальная задача. Основной проблемой является многофакторное влияние на течение химических реакций и физические процессы. Актуальной проблемой математического моделирования является вопрос о величине вклада различных явлений на процесс в целом [1–3]. Целью настоящей работы является численная оценка величины скорости вынужденной конвекции (стефановского потока) в процессе окислительной регенерации катализатора гидроочистки.

Наиболее полно динамику веществ химические реакции в слое и зерне катализатора отражают диффузионные модели [4]. В статье объектом исследования является зерно катализатора гидроочистки [5]. Как известно, зерно катализатора гидроочистки представляет собой вытянутый цилиндр, что оказывает влияние на течение процесса, а это в свою очередь приводит к увеличению погрешности моделирования при нахождении осредненных по зерну характеристик.

Математические модели окислительной регенерации сферического и цилиндрического зерна катализатора, а также вычислительные алгоритмы для них, построены в статьях [6, 7]. Их особенностью является учет вынужденной конвекции – стефановского потока – вследствие изменения реакционного объема. Детальное описание данного явления, а также причины его возникновения представлены в [8]. Вопрос о необходимости расчета скорости стефановского потока в первую очередь поднимается ввиду усложнения системы уравнений и ее

исследования. В исследуемой математической модели окислительной регенерации катализатора вынужденная конвекция связана в первую очередь с наличием гетерогенных реакций, описывающих сорбционные процессы [9]. В основе модели лежит кинетическая схема, представленная и апробированная в [10]. Схема реакции описывает выжиг коксовых отложений, содержащих серу:



Здесь $\omega_i, i = 1, \dots, 8$ – скорости отдельных стадий химического взаимодействия, размерность $\omega_1 - \omega_5, \frac{\text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$, размерность $\omega_6 - \omega_8 - \frac{\text{г}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$; $k_j(T), j = \overline{1, 8}$ – константы скорости стадий химического взаимодействия; x_1 – концентрация кислорода в газовой фазе реакции; θ_k – степень покрытия поверхности кокса различными углеродными комплексами (θ_1 – водородно-углеродный комплекс, θ_2 – кислородно-углеродный комплекс, θ_3 – свободная углеродная поверхность, θ_4 – свободная серная поверхность, θ_5 – кислородно-серный комплекс); θ_k^* – количество адсорбированного коксом водорода ($k = 1$) и кислорода ($k = 2$); z_1 и z_2 – концентрации водорода и кислорода в слое кокса в массовых долях; ρ_C и R_C – представляют собой плотность (г/м^3) и средний радиус гранул (м) кокса.

Математическая модель регенерации цилиндрического зерна для катализатора гидроочистки примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial y_i}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varphi \varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y_i}{\partial r} - r \hat{\mu} y_i \right) + \frac{R_z^2}{\varphi \varepsilon Z^2} \frac{\partial y_i}{\partial z} \left(R \frac{\partial y_i}{\partial z} - Z \mu y_i \right) + \frac{\hat{S}}{\varepsilon} \sum_{j=1}^5 v_{ij} \omega_j, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\lambda^* \tau_k}{c^* R^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\lambda^* \tau_k}{c^* Z^2} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\hat{S}_{c_0}}{T_{op} c^*} \sum_{j=1}^5 Q_j \omega_j, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu) + \frac{R}{Z} \frac{\partial \mu}{\partial z} &= \varphi \hat{S} (-\omega_1 + \omega_3 + \omega_5), \\
\frac{\partial q_c}{\partial t} &= -\frac{\hat{S}_{c_0}}{\gamma_k} (M_c \omega_1 + M_s \omega_3), \\
\frac{\partial z_1}{\partial t} &= \frac{\hat{S}_{c_0}}{\gamma_k} (M_c \omega_1 + M_s \omega_3) \frac{z_1}{q_c} + \frac{\omega_5}{q_c}, \\
\frac{\partial z_2}{\partial t} &= \frac{\hat{S}_{c_0}}{\gamma_k} (M_c \omega_1 + M_s \omega_3) \frac{z_2}{q_c} + \frac{\omega_6 + \omega_7}{q_c}, \\
\frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= -\hat{S} \omega_4 - \omega_5, \\
\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} &= \hat{S} (2\omega_1 + \omega_4) - \omega_6, \\
\frac{\partial \theta_3}{\partial t} &= -2\hat{S} \omega_1 + (\omega_5 + \omega_6), \\
\frac{\partial \theta_4}{\partial \tau} &= -2\hat{S} \omega_2 + \omega_7, \\
\frac{\partial \theta_5}{\partial \tau} &= -2\hat{S} \omega_2 - \omega_7.
\end{aligned} \right. \quad (2)$$

Здесь y_i , $i = \overline{1,4}$ – это концентрации веществ в порах зерна в мольных долях; c_0 – молярная плотность реакционной смеси, $\frac{\text{моль}}{\text{м}^3}$; v_{ij} , $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,8}$ – стехиометрические коэффициенты веществ; r – безразмерный радиус зерен катализатора, $r \in [0,1]$ (независимая пространственная переменная); l – безразмерная длина оси зерна катализатора, $l \in [0,1]$ (независимая пространственная переменная); t – это безразмерное время, $t \in [0, +\infty]$ (независимая пространственная переменная); $\theta(r, t)$ – безразмерная температура зерен катализатора; $y_i(r, t)$, $i = \overline{1,4}$ – мольные доли компонентов в газовой фазе реакции (индекс 1 соответствует кислороду, 2 – диоксиду углерода, 3 – диоксиду серы и 4 – воде); $\mu(r, t) = \frac{R \hat{\mu}}{D^*}$ – это безразмерная скорость Стефановского потока; q_c – массовая доля кокса на зерне катализатора; $z_1(r, t)$ и $z_2(r, t)$ – массовые доли водорода и кислорода в коксовом осадке; $\theta_1(r, t)$, $\theta_2(r, t)$, $\theta_3(r, t)$, $\theta_4(r, t)$ и $\theta_5(r, t)$ – доли водород-

углеродного, кислород-углеродного, свободного углерода, свободной серы и кислородно-серного комплексов на поверхности гранул кокса; $\hat{S}(r, t)$ – безразмерная площадь гранулы кокса; $\omega_j(r, t), j = \overline{1,5}$ – безразмерные скорости квазигомогенных реакций, взятые из кинетической схемы; $\omega_j(r, t), j = \overline{6,8}$ – безразмерные скорости гетерогенных реакций, взятые из кинетической схемы; $\varphi = \frac{\tau_k R^2}{D^*}$ – числовой параметр; D^* – является эффективным коэффициентом диффузии ($\text{м}^2/\text{с}$); $\hat{u}$ – скорость Стефановского потока, ($\text{м}/\text{с}$); τ_k – время контакта (с); R – радиус зерна катализатора, (м); Z – длина оси зерна катализатора, м ; ε – является пористостью зерен катализатора; $v_{ij}, i = \overline{1,4}$ – стехиометрические коэффициенты из схемы реакции; C_0 – молярная плотность газа, ($\text{моль}/\text{м}^3$); $T_{op} = 520^\circ$ – это температура, при которой экспериментально определяются константы скорости реакции (K); $Q_i, i = \overline{1,5}$ – тепловой эффект реакций, ($\text{Дж}/\text{моль}$); M_c – молярная масса кокса, ($\text{г}/\text{моль}$); T_z – температура зерен катализатора (K); c^* – объемная теплоемкость материала катализатора, ($\text{Дж}/\text{м}^3/\text{K}$); λ^* – коэффициент теплопроводности материала катализатора, ($\text{Вт}/\text{м}/\text{K}$); γ_k – насыпная плотность катализатора, $\text{г}/\text{м}^3$.

Начальные условия для системы (2) предполагают задание значений в начальный момент времени, граничные условия зависят от реализуемого режима регенерации. В настоящем исследовании выбраны условия теплообмена для функции температуры зерна катализатора и отсутствие массообмена для диффузионных уравнений.

Вычислительный алгоритм для модели (2) построен на основе принципа расщепления по физическим процессам: химическая кинетика рассчитывается трехстадийным методом Рунге-Кутты пятого порядка точности, диффузионные и конвективные потоки – с использованием метода конечных объемов.

Численное исследование системы (2) с учетом стефановского потока и в его отсутствие проводилось для различных начальных концентраций кислорода в реакционной смеси: 100, 21 и 5 % (об.). На рис. 1 приведены графики для суммы концентраций веществ газовой фазы реакции в абсолютных величинах (сумма концентраций должна быть равна начальной концентрации кислорода).

Построенные графики демонстрируют существенное влияние вынужденной конвекции на характер решения. При этом относительная величина отклонений достигает почти 5 % от начальной концентрации кислорода в газовой смеси (рис. 2).

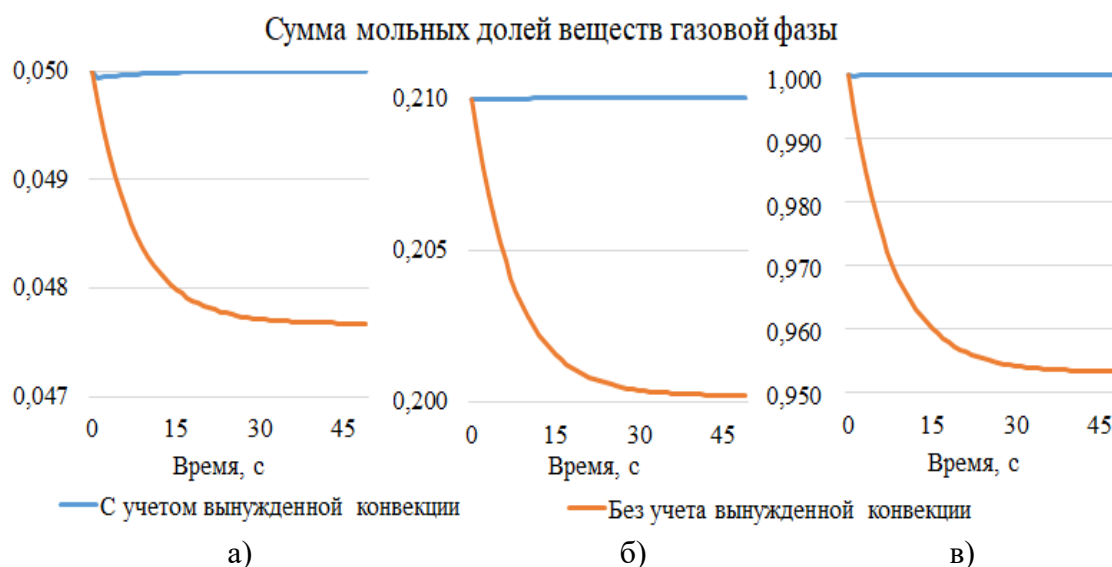


Рис. 1. Графики для суммы концентраций веществ газовой фазы при начальных объемных долях кислорода: а) 1.00; б) 0.21; в) 0.05

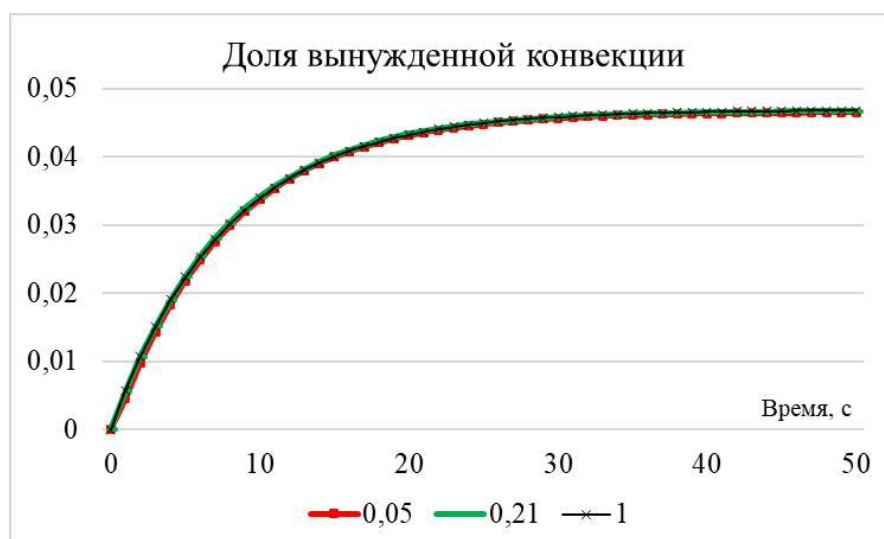


Рис. 2. Доля потока, приходящегося на вынужденную конвекцию, при различных значениях начальной концентрации кислорода

При этом из рис. 2 видно, что доля потока, приходящегося на вынужденную конвекцию, примерно одинакова для различных значений начальной концентрации кислорода. Это свидетельствует о наличии изменения объема в соответствии с экспериментально наблюдаемыми в [9] явлениями.

Таким образом, исключение стефановского потока из модели (2) приведет к искажению реальной картины процесса.

Список литературы

1. Жоров Ю. М. Моделирование физико-химических процессов нефтепереработки и нефтехимии. М. : Химия, 1978. 376 с.

2. Заварухин С. Г. Математическое моделирование влияния стефановского потока на процесс в зерне катализатора с использованием Mathcad // Кинетика и катализ. 2020. Т. 61, № 1. С. 144–148. doi: 10.31857/S0453881120010141
3. Peskova E. E., Yazovtseva O. S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows // Comput. Math. and Math. Phys. 2024. Vol. 64. P. 326–339. doi:10.1134/S0965542524020106
4. Малиновская О. А., Бесков В. С., Слинько М. Г. Моделирование каталитических процессов на пористых зернах. Новосибирск : Наука, 1975. 265 с.
5. Аспель Н. Б., Демкина Г. Г. Гидроочистка моторных топлив. Л. : Химия, 1977. 161 с.
6. Gubaydullin I. M., Peskova E. E., Yazovtseva O. S., Zagoruiko A. N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. Vol. 15. P. 485–495. doi: 10.1134/S2070048223030079
7. Yazovtseva O. S., Gubaydullin I. M., Peskova E. E. [et al.]. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11, № 3. P. 669. doi: 10.3390/math11030669
8. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М. : Наука, 1987.
9. Курятников В. В. Роль поверхностных свойств диспергированного угля в процессах его воспламенения // Физика горения и взрыва. 1983. Т. 19, № 5. С. 18–21.
10. Масагутов Р. М., Морозов Б. Ф., Кутепов Б. И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М. : Химия, 1987. 144 с.

6. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

УДК 519.36

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СПРОСА НА ТОВАРЫ

Татьяна Фанадовна Мамедова¹,
Екатерина Сергеевна Козлова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹mamedovatf@yandex.ru, ²kozloovakaty2000@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача автоматизации прогнозирования спроса на товар с помощью применения машинного обучения. Создано программное обеспечение, реализующее автоматизацию алгоритма машинного обучения – градиентный бустинг. Автоматизация прогнозирования выполнена в виде программного обеспечения на языке программирования Python.

Ключевые слова: спрос, машинное обучение, градиентный бустинг

APPLICATION OF MACHINE LEARNING ALGORITHMS TO FORECAST DEMAND FOR PRODUCTS

Tatiana F. Mamedova¹, Ekaterina S. Kozlova²

^{1,2}National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹mamedovatf@yandex.ru, ²kozloovakaty2000@gmail.com

Abstract. The problem of automating forecasting demand for a product using machine learning is considered. Software has been created that implements the automation of the machine learning algorithm - Gradient Boosting. Automation of forecasting is implemented in the form of software in the Python programming language.

Keywords: demand, machine learning, gradient boosting

Основная цель прогнозирования спроса на товары заключается в предсказании, сколько единиц товара будет продано в будущем, чтобы определить оптимальные уровни запасов, планировать производство, оптимизировать цепи поставок и разработать маркетинговые стратегии.

В настоящее время для автоматизации прогнозирования постоянно применяются методы машинного обучения.

Рассмотрим применение методов машинного обучения к следующей задаче прогнозирования спроса на товары.

Постановка задачи. Пусть имеется набор данных некоторых торговых предприятий, состоящий из временных рядов, где каждый временной ряд представляет собой исторические данные о спросе на конкретный товар в определенные моменты времени. Пусть эти данные представлены в виде векторов спроса на каждый товар в каждый момент времени.

Необходимо с целью регулирования закупками товаров, прогнозировать общее количество продаж товаров (по тестовой выборке) в рассматриваемых магазинах. Автоматизировать процесс прогнозирования с помощью методов машинного обучения.

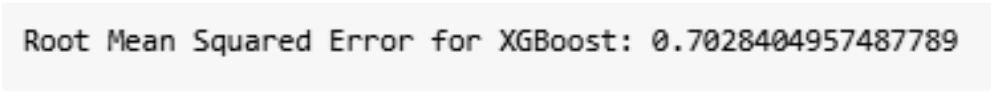
Автоматизация прогнозирования спроса на товар выполнена в виде программного обеспечения на языке программирования Python в среде для разработки и выполнения программного кода в облаке GoogleColaboratory.

Использовались исходные данные о продажах некоторых торговых предприятий с 01.01.2021 по 01.10.2023. Пусть имеется набор данных некоторых торговых предприятий, состоящий из временных рядов, где каждый временной ряд представляет собой исторические данные о спросе на конкретный товар в определенные моменты времени. Пусть эти данные представлены в виде векторов спроса на каждый товар в каждый момент времени. Для автоматизации процесса прогнозирования все входные данные были представлены в виде нескольких специальных таблиц.

После расчета всех необходимых лагов, все данные были разделены на тренировочную и тестовую выборки, а также дополнительно выделены отдельно столбец продаж. Далее было проведено обучение модели, а после предсказание будущих продаж на два месяца вперед и выведение среднего квадратичного отклонения нашего предсказания от тестовых данных.

Модель была проверена на двух наборах параметров. В первом случае шаг выбран 0.3, глубина дерева равна 6, в качестве усилителя будут использоваться древовидные модели, и выбрана линейная регрессия. Остальные параметры остаются по умолчанию.

Результат предсказания модели в первом случае можно увидеть ниже (рис. 1).



```
Root Mean Squared Error for XGBoost: 0.7028404957487789
```

Рис. 1. Результат XGBoost с первым набором параметров

Во втором случае глубина дерева равна 10, шаг – 0.1, gamma = 2. Gamma отвечает за сокращение потерь: чем больше gamma, тем более консервативным будет алгоритм. Остальные параметры остаются по умолчанию.

Результат предсказания модели во втором случае представлены на рис. 2.

Root Mean Squared Error for XGBoost: 0.6927460769163377

Рис. 2. Результат XGBoost со вторым набором параметров

Для обоих наборов параметров предсказание достаточно точное, однако, для второго набора параметров модель предсказывает немного лучше.

На рис. 3, наглядно можно сравнить предсказанные значения с тестовым набором данных.

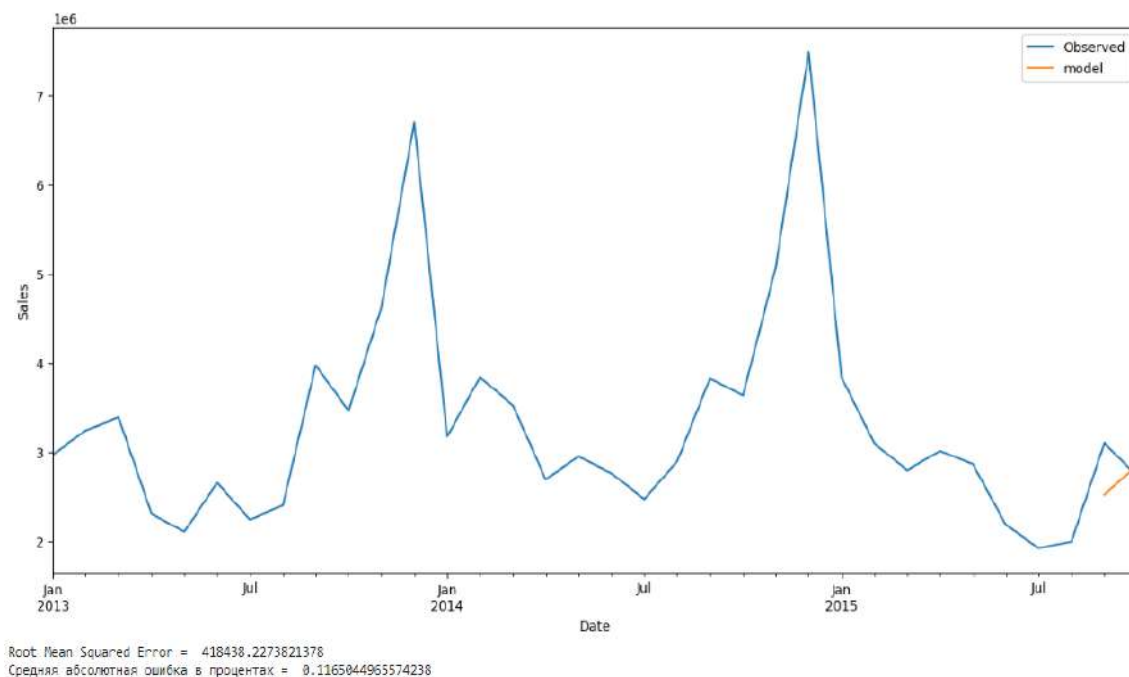


Рис. 3. Результат XGBoost

Средняя абсолютная ошибка предсказания нашей модели равна 11 %.

Среднеквадратичная ошибка равна 418438.23.

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА РЕГРЕССИИ ЛАССО В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

Всеволод Николаевич Зорин

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
vsevolod.zorin@internet.ru

Аннотация. Результатом проведенной работы стало создание модели регрессии лассо, позволяющей определить наличие заболевания сердца у пациента на основе пяти признаков. Рассматриваются модель регрессии лассо и ее особенность. Показана реализация ее модели с помощью библиотеки Sklearn и языка программирования Python.

Ключевые слова: регрессия лассо, математическая модель, среднеквадратичная ошибка, Python, машинное обучение

FEATURES OF USING THE LASSO REGRESSION METHOD IN MACHINE LEARNING

Vsevolod N. Zorin

Penza State University, Penza, Russia
vsevolod.zorin@internet.ru

Abstract. Result of this work was creation of a lasso regression model that allows to determine the presence of heart disease in a patient based on five signs. The lasso regression model and its feature are considered. The implementation of its model using the Sklearn library and the Python programming language are considered.

Keywords: lasso regression, mathematical model, root mean square error, Python, machine learning

Введение

Машинное обучение стало одним из наиболее популярных направлений в сфере информационных технологий. Знание основных алгоритмов машинного обучения, а также математических формул позволит эффективно анализировать и обрабатывать данные. Одним из основных алгоритмов обработки данных является регрессия. Наиболее популярной является линейная регрессия, однако она не всегда может быть применена ввиду некоторых ограничений. Одним из известных эффективных методов регрессии является метод лассо.

Математическое описание метода лассо

Метод регрессии лассо (англ. LASSO, Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) – метод, используемый в статистике, и позволяющий решить проблему мультиколлинеарности (присутствие линейной зависимости у объясняющих переменных) [1]. Также он отбирает наиболее информативные признаки с точки зрения объяснения дисперсии переменной (величина, показывающая, как именно и насколько сильно разбросаны значения).

Его основная идея состоит в том, чтобы ввести небольшое смещение для существенного уменьшения разброса значений.

Также он позволяет автоматизировать части выбора модели, например выбор переменных или исключение какого-либо параметра. Данный метод использует сжатие коэффициентов, то есть процесс, в котором значения данных приближаются к центральной точке (например, среднему значению).

Математически модель регрессии лассо состоит из линейной модели с добавленным членом регуляризации. Целевая функция, которую необходимо минимизировать, записывается следующим образом:

$$\min_w \frac{1}{2n_{\text{samples}}} \|Xw - y\|_2^2 + \alpha \|w\|_1$$

Таким образом, оценка лассо решает проблему минимизации штрафа методом наименьших квадратов с помощью $\alpha \|w\|_1$ добавлено, где α – постоянная, а $\|w\|_1$ это L1-норма вектора коэффициентов [2].

Реализация метода лассо средствами языка Python

Проверим работу данного типа регрессии на данных о сердечно-сосудистых заболеваниях пациентов. В качестве входных данных у нас будут уровень холестерина, максимальное давление, возраст пациента, давление в покое и показания ЭКГ пациента:

```
X = data_full[["chol", "thalach", "age", "trestbps",  
"restecg"]  
y = data["target"]
```

Среди них мы попытаемся найти наиболее информативный признак, влияющий на диагноз пациента. Для этого необходимо импортировать библиотеки Sklearn и Matplotlib (библиотека для создания графиков):

```
import pandas as pd  
from sklearn.linear_model import Lasso  
import matplotlib.pyplot as plt  
from sklearn.model_selection import GridSearchCV
```

В Python регрессия лассо вычисляется с помощью модуля Lasso из библиотеки Sklearn следующим образом:

```
alpha_values = {'alpha':[0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04,
0.05, 0.06,0.07, 0.08, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 50, 100]}
lasso = GridSearchCV(Lasso(), alpha_values, scoring = 'neg_mean_squared_error', cv = 5)
print('The best value of alpha is:',
lasso.fit(X,y).best_params_)
print('The best score is:', lasso.fit(X,y).best_score_)
```

В программе мы искали оптимальное значение альфы среди тех, что мы указали. Для этого мы воспользовались модулем GridSearchCV, который помогает найти оптимальные варианты выбранного значения.

Затем программа обучила модель на основе входных показателей и определила значение Lasso-модели (показатель alpha) и значение среднеквадратичной ошибки. Результатом работы программы являются коэффициенты модели:

```
The best value of alpha is: {'alpha': 0.001}
The best score is: -0.20020317317871633
```

Узнав значение показателя alpha, проведём обучение модели с его использованием и сохраним полученные коэффициенты:

```
lasso_model = Lasso(alpha = 0.02)
lasso_coefs = lasso_model.fit(X, y).coef_
print(lasso_coefs)
```

Также с помощью библиотеки Matplotlib выведем график коэффициентов для наглядности результатов, представленный на рис. 1.

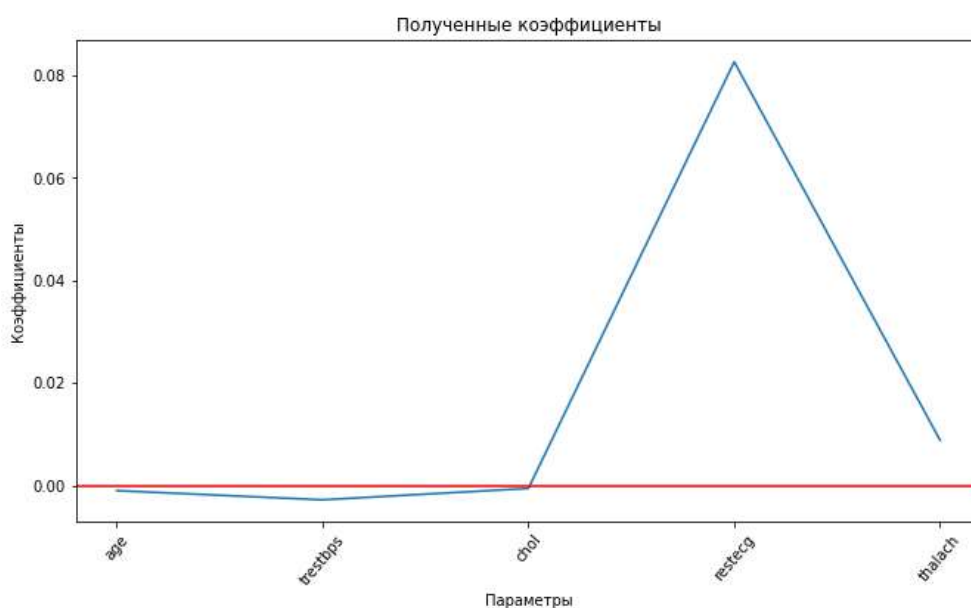


Рис. 1. Коэффициенты регрессии Лассо

Согласно графику, показателями, влияющие на наличие сердечно-сосудистого заболевания, являются показатель ЭКГ, а также максимальное давление пациента.

Список литературы

1. Лассо-регрессия // Портал «Большая российская энциклопедия». URL: <https://bigenc.ru/c/lasso-regressiia-79d732> (дата обращения: 17.05.2024).
2. Линейные модели // Портал «Skit-Learn». URL <https://scikit-learn.ru/1-1-linear-models/> (дата обращения: 17.05.2024).

АРХИТЕКТУРА МНОГОЦЕЛЕВОГО КОНВЕЙЕРА ДЛЯ РЕОРГАНИЗАЦИИ ИНФЕРЕНСА НЕЙРОННОЙ СЕТИ

**Всеволод Дмитриевич Лукин¹,
Михаил Владимирович Верховский²,
Никита Иванович Барсуков³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹vs.d.lukin@gmail.com, ²mishaverxovskiy01@gmail.com, ³nikita-bar@bk.ru

Аннотация. Организован поиск эффективной и простой архитектуры для разворачивания нейронных сетей. Эффективностью в изложенном контексте является минимизация временных затрат на скорость обработки информации по сравнению с разворачиванием исходной модели. Простота является абстрактным критерием, однако его можно выразить как понимание архитектуры разработчиком любого уровня компетенции. Актуальность рассматриваемой тематики довольно высока из-за увеличения популярности использования различных нейронных сетей. Ранее предпринимались попытки поиска подобной архитектуры, но на данный момент не существует универсального решения для разворачивания подобных систем. Зачастую архитекторы или разработчики не рассматривают организацию конвейера обработки в нейронных сетях и ориентируются на выполнение одиночных запросов. Для ликвидации данного пробела при разработке системы необходим поиск универсального подхода к выстраиванию элементов подобной системы, чтобы максимально оптимизировать временные затраты на обработку информации. Рассматривается возможность улучшения существующих подходов к организации нейронных сетей, а также предложение новых архитектур, инкапсулирующих инференсы нейронных сетей.

Ключевые слова: инференс, эффективность, производительность, архитектура, оптимизация, универсальность, временные затраты

ARCHITECTURE OF A MULTI-PURPOSE CONVEYOR FOR REORGANIZING NEURAL NETWORK INFERENCE

**Vsevolod D. Lukin¹, Mikhail V. Verkhovsky²,
Nikita I. Barsukov³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹vs.d.lukin@gmail.com, ²mishaverxovskiy01@gmail.com, ³nikita-bar@bk.ru

Abstract. A search for an effective and simple architecture for deploying neural networks has been organized. Efficiency in the above context is the minimization of time costs for the speed of information processing compared to the deployment

of the original model. Simplicity is an abstract criterion, however, it can be expressed as an understanding of the architecture by a developer of any level of competence. The relevance of the topic under consideration is quite high due to the increasing popularity of the use of various neural networks. Previously, attempts have been made to search for a similar architecture, but at the moment there is no universal solution for deploying such systems. Often, architects or developers do not consider organizing a processing pipeline in neural networks and focus on executing single requests. To fill this gap when developing a system, it is necessary to search for a universal approach to arranging the elements of such a system in order to maximally optimize the time spent on information processing. The possibility of improving existing approaches to organization and proposing new architectures that wrap inferences of neural networks are being considered.

Keywords: inference, efficiency, performance, architecture, optimization, versatility, time costs

Введение

Использование нейросетей зачастую является основополагающим фактором при вычислении количества необходимых аппаратных ресурсов системы. Проблема большого расхода вычислительных ресурсов является распространённой, поэтому требует к себе максимального внимания. Решение может заключаться в увеличении количества ресурсов, либо в оптимизации работы рассматриваемой модели [5]. Второй способ является наиболее корректным из-за отсутствия расходов дополнительных средств на аппаратные компоненты и, в некоторых случаях, является более эффективным, нежели увеличение количества вычислительных ресурсов. К дополнительным плюсам оптимизации при проектировании является упрощение масштабирования системы при её увеличении, позволяющее разделить рассматриваемые элементы на различные вычислительные кластеры.

1. Анализ работы нейронной сети

При анализе работы нейронной сети с точки зрения модели обслуживания можно сделать вывод, что каждая из моделей имеет идентичную организацию и может быть использована для создания конвейера для преобразования данных. Вне зависимости от рассматриваемого типа модели главным условием работы нейронной сети является передача данных для последующего преобразования. Соответственно, для максимальной оптимизации временных затрат при конвейерной обработке необходимо ускорить передачу данных и сократить время их обработки. Чтобы упростить представление о данных, можно представить их в универсальной форме хранения – файле, как это показано на рис. 1.

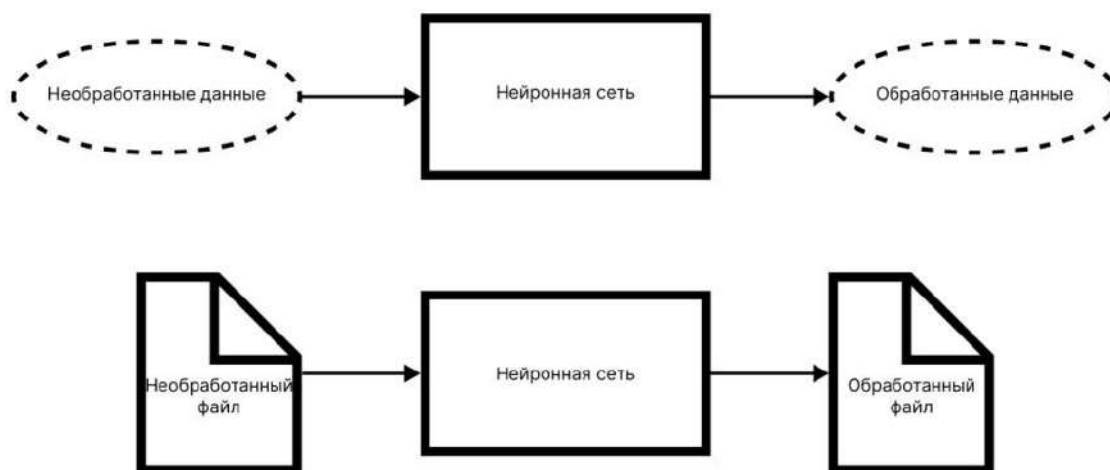


Рис. 1. Представление работы нейронной сети

Выше рассматривался «идеальный» сценарий работы нейросетевой модели. Данный сценарий не включал в себя факт того, что перед попаданием в инференс файл для преобразования должен быть предварительно обработан. Например, если модель связана с преобразованием изображений, то возможно возникновение потребности предварительного конвертирования изображения в другой формат. Идентичная ситуация может возникнуть после преобразования файла моделью. Инференс может выполнять все операции только с файлами расширения .png, однако конечному пользователю может быть интересен результат только в формате .jpg. Именно для этого преобразованный файл нейросети должен попадать в постобработчик [6].

Из-за ресурсоёмкости преобразований нейросети желательно сохранять полученные результаты во избежание последующей потери данных и повторного преобразования [7]. Для решения данной проблемы следует применять одинаковые меры предосторожности как к предварительно, так и к постобработанным файлам. Данными мерами служат основные и резервные хранилища данных [4]. При конвейерной обработке высок шанс ошибки на одном из этапов. Резервное хранилище данных выступает хранителем для промежуточных данных. Основные хранилища содержат в себе необработанные данные и конечные результаты преобразования и обработки.

2. Применение конкретных практик для многоцелевого конвейера

Более подробно рассмотрим сформированную архитектуру на рис. 2. В качестве хранилищ необработанных, обработанных и промежуточных файлов может выступать любая доступная директория в операционной системе. Рассматривая данную организацию на операционной системе Linux, можно создать следующее расположение хранилищ по умолчанию.

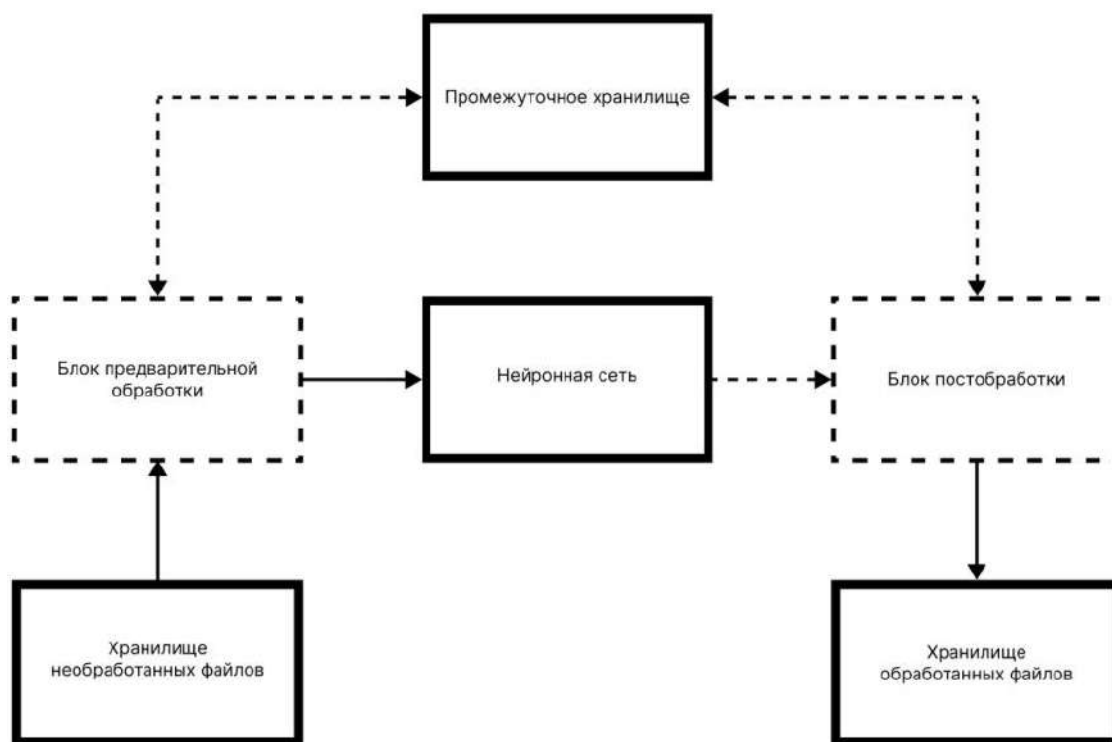


Рис. 2. Многоцелевая архитектура конвейера для инференса нейронной сети

Хранилища связаны с блоками обработки и постобработки. Данные блоки – это определённая последовательность обработчиков для файлов, поступающих на вход или из выхода блока нейронной сети. Внутренняя организация данных блоков подразумевает использование микросервисной архитектуры. Это необходимо для ликвидации ситуаций, когда блок начинает требовать больших вычислительных затрат. В данной ситуации блок будет отмасштабирован в отдельный кластер. Микросервисы довольно просто позволяют выстроить последовательность, образующую непрерывный конвейер обработки файлов, и не имеют критической зависимости друг от друга, так как могут быть быстро перезапущены [1].

Каждый микросервис из последовательности должен быть представлен в виде демона или службы с поддержкой пула потоков и периодическим перезапуском для контроля работоспособности. Использование данного подхода обосновано следующими факторами:

- Легкий контроль и перезапуск через подсистемы управления службами. Автоматический перезапуск сервиса при потере его работоспособности с предварительным сохранением обработанных данных [2].
- Наличие возможности использовать индивидуальный балансировщик нагрузки для каждого сервиса, что повышает надёжность системы и уменьшает количество общих используемых элементов.

- Скорость обработки демонов выше из-за отсутствия необходимости создавать процесс, что является довольно дорогой операцией [3].

Но использование демонов при реализации конвейера может иметь свои неудобства. Например, организация общего балансировщика нагрузки приводит к появлению общего используемого элемента, что может повлиять на производительность всей системы.

Инференс нейросети также должен быть обёрнут и представлять из себя демон, работающий в автоматическом режиме. Это позволит получить модели плюсы, описанные выше.

Для достижения максимального уровня файловой сохранности нейронный блок может включать в себя внутреннее взаимодействие с временным хранилищем. Это позволит сохранить результаты промежуточного преобразования в хранилище и использовать их после восстановления при возникновении критического сценария работы (рис. 3).

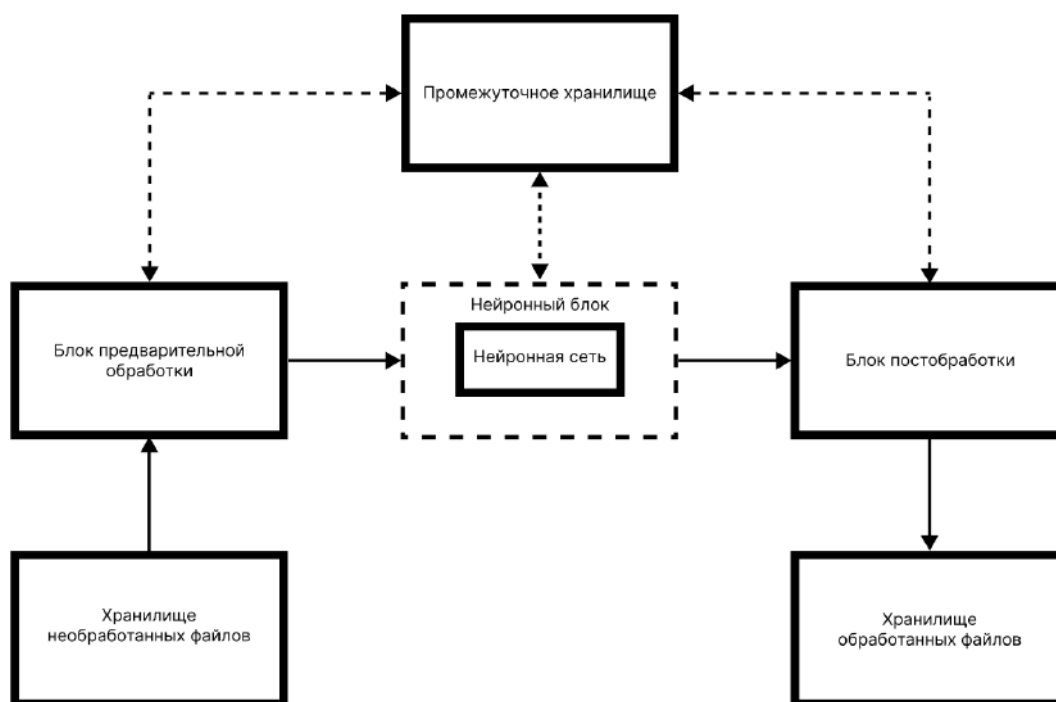


Рис. 3. Многоцелевая архитектура конвейера с максимальной файловой сохранностью

3. Использование многоцелевой архитектуры конвейера на конкретной нейросети

Поставлена конкретная задача: организовать конвейерную обработку видео при помощи нейронной сети, осуществляющей работу исключительно с изображениями в определённом формате. Если посмотреть на данную задачу без архитектуры, описанной выше, то возникает ощущение сложности выполнения подобной задачи. Однако, используя

ранее полученную архитектуру, можно довольно быстро разрешить поставленную цель.

В описании будут использованы хранилища по умолчанию, описанные в табл. 1.

Таблица 1

Пример расположения хранилищ по умолчанию в ОС Linux

Тип хранилища	Расположение в системе
Хранилище необработанных файлов	/home/user/raw
Хранилище обработанных файлов	/home/user/cache
Промежуточное хранилище	/home/user/result

Преобразование видео в данной нейросети возможно только при разбиении видео на кадры, соответственно, первый микросервис, используемый в блоке подготовке данных – frames_cutter. Это демон, занимающийся преобразованием видео в последовательность кадров с заданной частотой. В блоке постобработки будет присутствовать подобный демон с обратной функцией – frames_gluer. Данный демон будет превращать полученные кадры в видеофайлы (рис. 4).

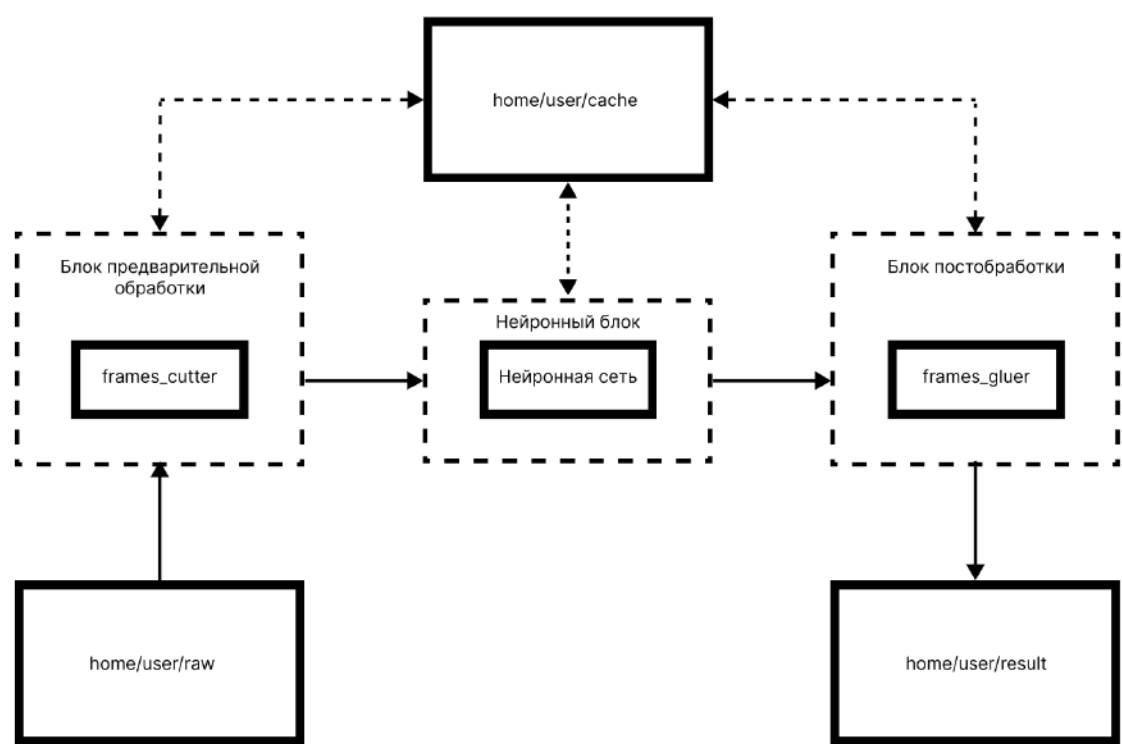


Рис. 4. Первый вариант архитектуры для поставленной задачи

Использование приведённой схемы позволит получить преобразованное видео, но оно не будет иметь звука. Нужны демоны audio_cutter и audio_gluer для отделения и добавления аудиопотока в конвейере (рис. 5).

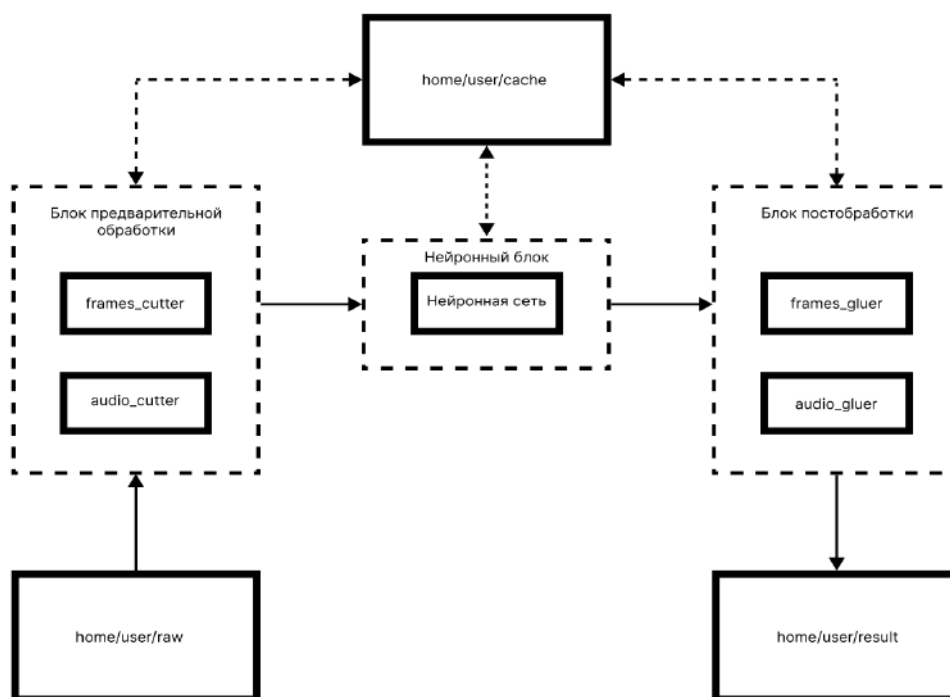


Рис. 5. Минимальная архитектура для поставленной задачи

Чтобы дополнительно уменьшить время преобразования и обработки можно добавить в схему демонов `chunks_cutter` и `chunks_gluer`. Они будут отвечать за дробление видеофайла на более маленькие части, что позволит увеличить эффективность многопоточности в конвейере (рис. 6).

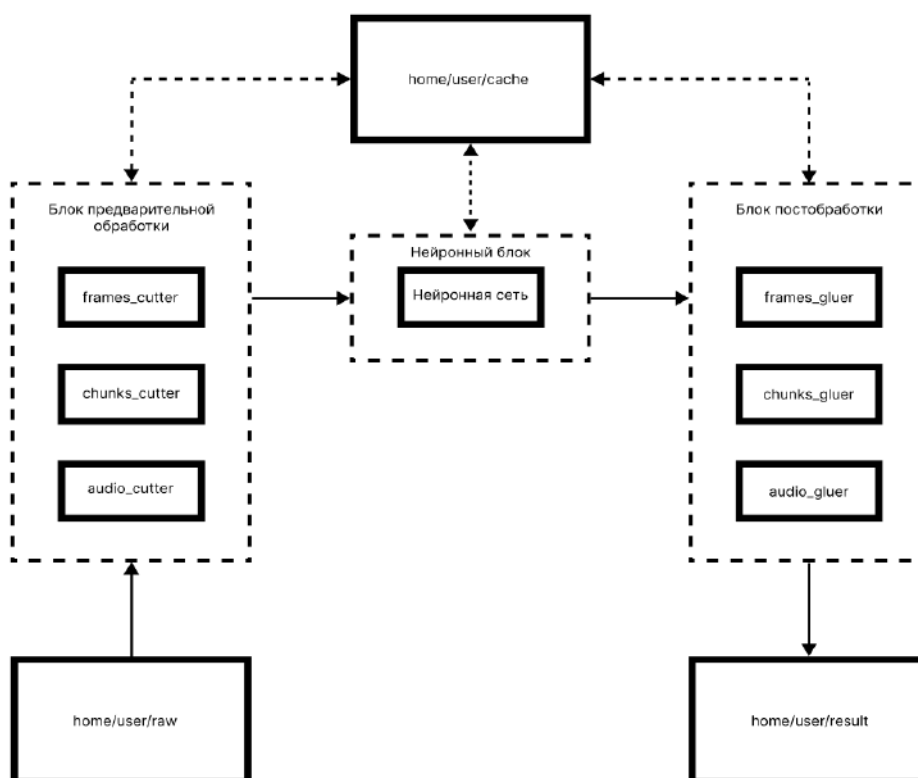


Рис. 6. Желательная архитектура для поставленной задачи

Заключение

Представленная в работе архитектура многоцелевого конвейера для реорганизации инференса нейронной сети позволяет увеличить эффективность использования вычислительных ресурсов, выделенных под создание подобного конвейера. Стоит отметить, что простота и понятность архитектуры позволяет применить её на большинство решаемых разработчиком задач, где подразумевается использование нейросетевого конвейера. Возможны доработки данной архитектуры, однако её основа будет оставаться неизменной.

Список литературы

1. Создание микросервисов. 2-е изд. СПб. : Питер, 2023. 624 с. (Бестселлеры O'Reilly).
2. URL: <https://habr.com/ru/companies/slurm/articles/255845/> (дата обращения: 17.05.2024).
3. Библия Linux. 10-е изд. СПб. : Питер, 2022. 928 с. (Для профессионалов).
4. Искусство планирования мощностей. СПб. : Питер, 2011. 208 с.
5. URL: <https://habr.com/ru/articles/240899/> (дата обращения: 17.05.2024).
6. Иванов А. И., Кубасов И. А. Сильный искусственный интеллект: повышение качества нейросетевых решений с переходом к обработке входных данных большого объема // Надежность и качество сложных систем. 2021. № 1. С. 9–16. doi: 10.21685/2307-4205-2021-1-1
7. Кошелев Н. Д., Алхатем А., Новиков К. С. [и др.]. Управление искусственных нейронных сетей распознавания раскадровки образов высокого разрешения // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 2. С. 85–91. doi: 10.21685/2307-4205-2022-2-10

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ CATBOOST ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕН НА КВАРТИРЫ

Максим Игоревич Меркурьев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

maksmerkurev@yandex.ru

Аннотация. Описывается возможность использования системы машинного обучения CatBoost для прогнозирования цен на квартиры на основе различных характеристик объектов недвижимости.

Ключевые слова: машинное обучение, прогнозирование, градиентный бустинг, обучение с учителем, цены на квартиры

APPLICATION OF THE CATBOOST MACHINE LEARNING SYSTEM FOR PREDICTING APARTMENT PRICES

Maxim I. Merkurev

Penza State University, Penza, Russia

maksmerkurev@yandex.ru

Abstract. The article describes the possibility of using the CatBoost machine learning system to predict apartment prices based on various characteristics of real estate properties.

Keywords: machine learning, forecasting, gradient boosting, supervised learning, apartment prices

В последние годы машинное обучение значительно повлияло на способы анализа и прогнозирования в различных сферах экономики, включая рынок недвижимости. Стандартные методы оценки стоимости квартир, основанные на анализе сопоставимых рыночных данных и экспертных мнениях, часто не учитывают все влияющие факторы. В отличие от них модели машинного обучения могут быстро и комплексно анализировать многочисленные переменные, что позволяет прогнозировать цены на квартиры с высокой степенью точности.

В данной работе рассматривается применение открытой программной библиотеки CatBoost на языке программирования Python для прогнозирования цен на квартиры. CatBoost – это высокопроизводительная система машинного обучения, разработанная командой Yandex, которая использует схему градиентного бустинга на деревьях решений. Основные преимущества CatBoost перед другими алгоритмами следующие:

1) эффективная работа с категориальными переменными: в отличие от других алгоритмов, которые требуют предварительной обработки категориальных переменных, CatBoost может сразу работать с ними без дополнительных преобразований;

2) устойчивость к переобучению: CatBoost содержит механизмы, которые предотвращают подгонку модели под обучающую выборку;

3) высокая скорость обучения и прогнозирования: благодаря оптимизации, CatBoost работает быстрее многих других алгоритмов градиентного бустинга.

В частности, используется CatBoostRegressor – класс библиотеки CatBoost, предназначенный для прогнозирования непрерывных переменных, то есть для решения задач регрессии.

Для обучения модели использовались данные с интернет-сервиса ЦИАН, который является одним из крупнейших ресурсов для размещения объявлений о продаже и аренде недвижимости. Данные, собранные по городу Пенза, содержат 2438 примеров и включают следующие признаки (рис. 1):

1) price – цена квартиры, указанная в объявлении (тип данных float64);

2) floor – этаж, на котором расположена квартира (тип данных int64);

3) floors_count – общее количество этажей в доме (тип данных int64).

4) rooms_count – количество комнат в квартире (тип данных int64);

5) total_meters – общая площадь квартиры в квадратных метрах (тип данных float64);

6) district – район, в котором находится квартира: "Железнодорожный", "Ленинский", "Октябрьский" или "Первомайский" (тип данных object);

7) object_type – тип жилья: "new" – новостройка, "secondary" – вторичка (тип данных object).

	price	floor	floors_count	rooms_count	total_meters	district	object_type
0	4811200.0	3	9	2	49.60	Железнодорожный	new
1	4490000.0	8	18	2	62.20	Октябрьский	new
2	3680800.0	2	17	2	42.80	Октябрьский	new
3	3890000.0	17	18	2	54.14	Октябрьский	new
4	6493000.0	2	16	2	75.50	Октябрьский	new

Рис. 1. Первые пять примеров из исходного датафрейма

Построив матрицу корреляции между числовыми признаками, можно сказать, что цена квартиры больше всего зависит от ее площади, а уже потом от количества комнат, количества этажей в доме и самого этажа, на котором расположена квартира (рис. 2) [2].

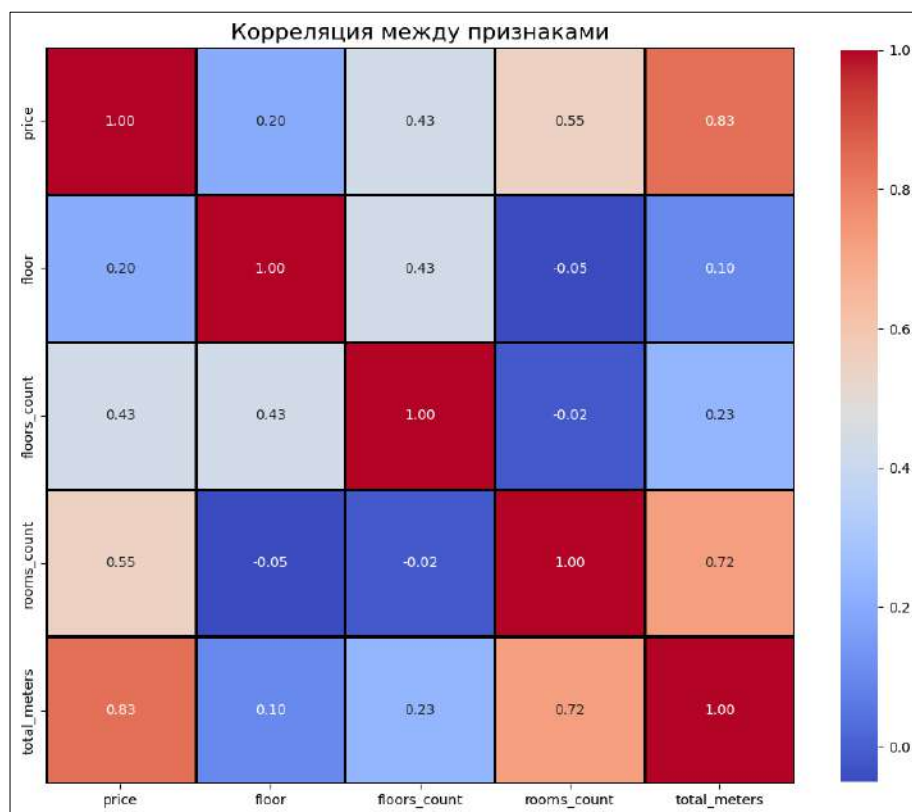


Рис. 2. Матрица корреляции между признаками

Построив диаграмму рассеяния между ценой и площадью, а также добавив линию тренда на нее, можно увидеть, что, в целом, точки расположены вдоль линии (рис. 3) [2]. Это значит, что данные имеют линейную зависимость, следовательно, выбор модели машинного обучения CatBoostRegressor для прогнозирования цен на квартиры полностью оправдан.

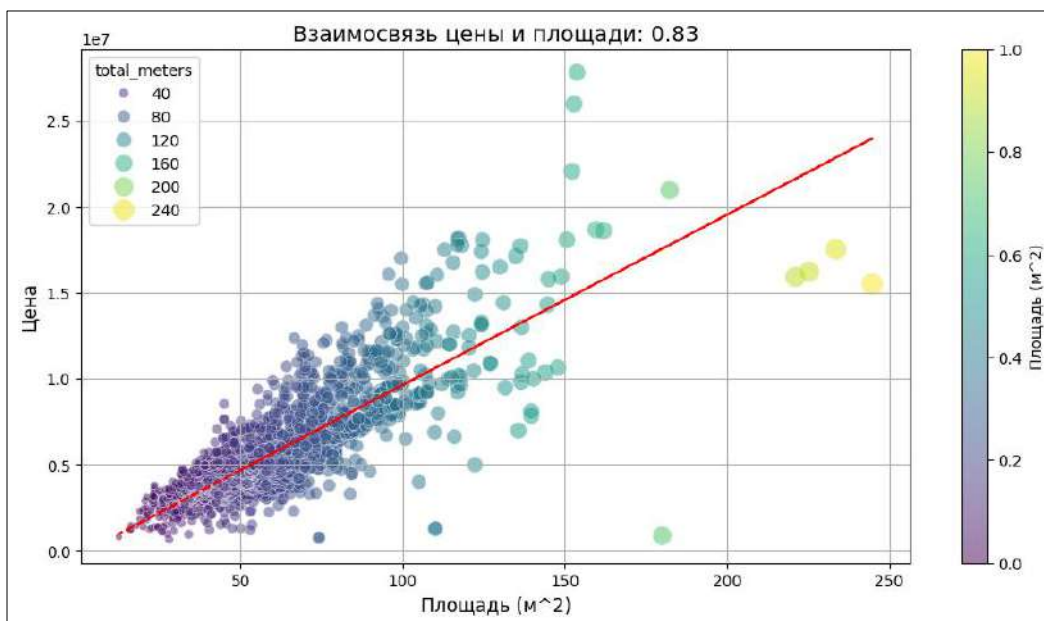


Рис. 3. Взаимосвязь цены и площади

Исходный набор данных, разделенный на признаки (X) и целевую переменную (y), разбивается на обучающую и тестовую выборки [1]. Для модели CatBoostRegressor определяются гиперпараметры: количество итераций, скорость обучения, глубина деревьев, функция потерь и категориальные признаки (район и тип жилья). После происходит обучение модели на обучающей выборке (X_train, y_train):

```
X = df.drop('price', axis=1)
y = df['price']
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y,
test_size=0.2, random_state=42)
cat_features = ['district', 'object_type']
model = CatBoostRegressor(iterations=1000, learning_rate=0.1,
depth=6, loss_function='RMSE', cat_features=cat_features)
model.fit(X_train, y_train, verbose=200)
```

В качестве статистического показателя для оценки качества регрессии будет использоваться R^2 [1]. Для построенной модели его значение равно 0.90805. Это указывает на то, что модель очень хорошо объясняет вариативность данных:

```
y_pred = model.predict(X_test)
r2 = r2_score(y_test, y_pred)
print(f'R^2: {r2:.5f}')
```

После того, как модель CatBoostRegressor обучилась, можно посмотреть влияние (в процентах) различных признаков на прогнозируемую способность (рис. 4).

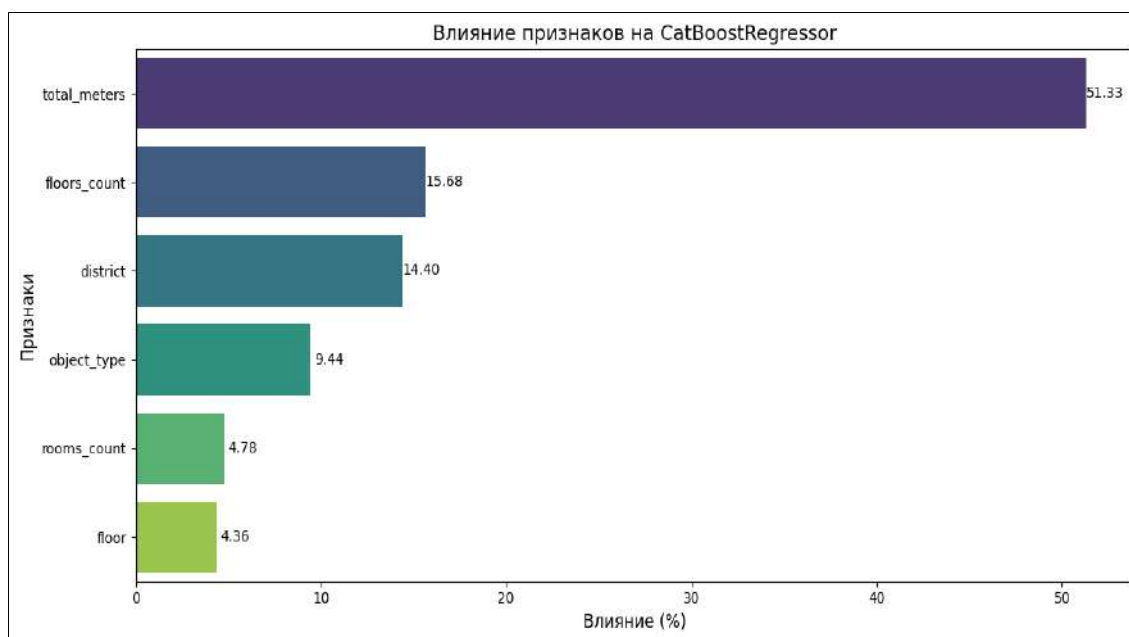


Рис. 4. Влияние признаков на CatBoostRegressor

Построив диаграмму рассеяния прогнозируемых и фактических значений цены на квартиру, можно сказать, что точки находятся рядом с прямой идеального соответствия – красная пунктирная линия (рис. 5) [2]. Это означает, что прогнозируемые значения модели очень близки к фактическим, что свидетельствует о высокой точности обученной модели CatBoostRegressor для прогнозирования цен на квартиры на основе различных характеристик объектов недвижимости.

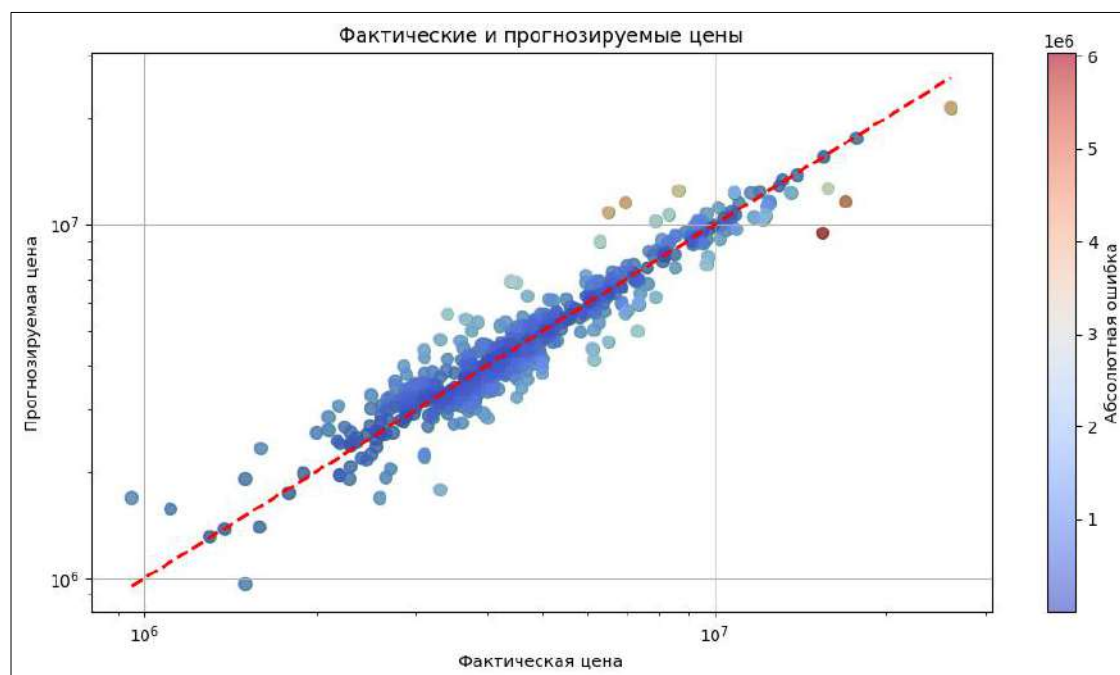


Рис. 5. Фактические и прогнозируемые цены

Использование системы машинного обучения CatBoost для прогнозирования цен на квартиры показало высокую эффективность и точность. Модель успешно обрабатывает как числовые, так и категориальные данные, предоставляя надежные и быстрые прогнозы, которые могут быть полезны обычным покупателям, застройщикам, инвесторам и агентствам недвижимости.

Список литературы

1. Жерон Орельен. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn, Keras и TensorFlow: концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем : пер. с англ. 2-е изд. СПб. : Диалектика, 2020. 1040 с.
2. Плас Дж. Вандер. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение. СПб., 2018. 576 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ CATBOOST ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТОИМОСТИ АВТОМОБИЛЕЙ

Максим Игоревич Меркурьев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

maksmerkurev@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается применение системы машинного обучения CatBoost для прогнозирования стоимости подержанных автомобилей на основе доступных о них данных.

Ключевые слова: обучение с учителем, градиентный бустинг, прогнозирование, машинное обучение, стоимость автомобиля

USING THE CATBOOST MACHINE LEARNING SYSTEM FOR PREDICTING CAR PRICES

Maxim I. Merkurev

Penza State University, Penza, Russia

maksmerkurev@yandex.ru

Abstract. The article discusses the application of the CatBoost machine learning system for predicting the cost of used cars based on available data about them.

Keywords: supervised learning, gradient boosting, forecasting, machine learning, car cost

В современном мире технологии машинного обучения сильно повлияли на анализ и методы оценки в различных сферах экономики, в том числе на рынке подержанных автомобилей. Алгоритмы машинного обучения позволяют анализировать огромные объемы данных, собранных с различных сервисов по продаже автомобилей, и находить в них закономерности, что в свою очередь дает возможность довольно точно прогнозировать стоимость транспортного средства.

В данной работе рассматривается использование библиотеки CatBoost на языке программирования Python для прогнозирования стоимости подержанных автомобилей. CatBoost – это высокопроизводительная система машинного обучения, разработанная командой Yandex, которая использует схему градиентного бустинга на деревьях решений. Основные преимущества, которые можно выделить у CatBoost:

1) обработка категориальных данных без предварительной подготовки: CatBoost уникален тем, что может непосредственно обрабатывать категориальные данные, в то время как другие алгоритмы требуют их предварительного преобразования;

2) защита от переобучения: в CatBoost встроены функции, которые помогают избежать подгонку модели под обучающую выборку;

3) быстрая скорость обучения и выполнения прогнозов: CatBoost обеспечивает быстрое обучение и прогнозирование по сравнению с другими алгоритмами градиентного бустинга благодаря своей оптимизации.

Для прогнозирования непрерывной переменной стоимости автомобиля будет использоваться CatBoostRegressor – специальный класс в рамках библиотеки CatBoost, предназначенный для решения задач регрессии.

Для обучения модели были взяты данные с интернет-портала Дром, который предоставляет возможность для размещения объявлений о продаже подержанных автомобилей. Данные, собранные по городу Пенза, содержат 621 пример и включают следующие признаки (рисунок 1):

- 1) brand – название марки (тип данных object).
- 2) bodyType – тип кузова (тип данных object).
- 3) fuelType – тип топлива (тип данных object).
- 4) year – год выпуска (тип данных float64).
- 5) mileage – пробег автомобиля (тип данных float64).
- 6) transmission – тип трансмиссии (тип данных object).
- 7) power – количество лошадиных сил (тип данных float64).
- 8) engineDisplacement – объем двигателя (тип данных object).
- 9) price – стоимость автомобиля (тип данных int64).

	brand	bodyType	fuelType	year	mileage	transmission	power	price	engineDisplacement
0	Hyundai	Джип 5 дв.	Бензин	2021.0	1000.0	АКПП	123.0	2499000	1.6 LTR
1	Ford	Седан	Бензин	2010.0	220000.0	Робот	200.0	270000	2.0 LTR
2	Jaguar	Седан	Бензин	2014.0	37000.0	АКПП	340.0	2165000	3.0 LTR
3	Skoda	Лифтбек	Бензин	2017.0	115000.0	Механика	90.0	889000	1.6 LTR
4	Лада	Джип 3 дв.	Бензин	2016.0	104000.0	Механика	83.0	670000	1.7 LTR

Рис. 1. Первые пять примеров из исходного датафрейма

Выполнив кодирование категориальных переменных в числовые значения, а затем, построив матрицу корреляции между всеми признаками, можно увидеть, что стоимость автомобиля в большей степени зависит от количества лошадиных сил, года выпуска, объема двигателя, а уже потом от типа кузова, топлива, трансмиссии, марки и пробега (рис. 2) [2].

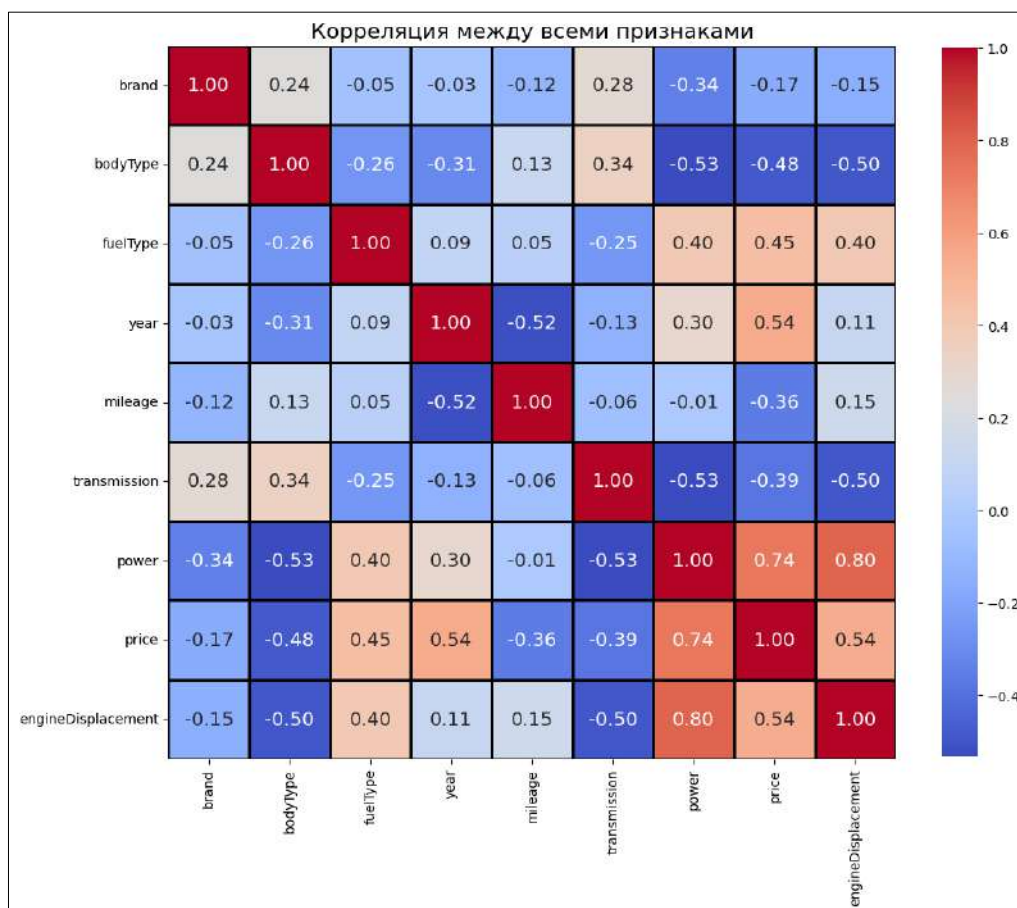


Рис. 2. Матрица корреляции между всеми признаками

Исходный набор данных, разделенный на признаки (X) и целевую переменную (y), разбивается на обучающую и тестовую выборки [1]. Для модели CatBoostRegressor задаются гиперпараметры: количество итераций, скорость обучения, глубина деревьев, функция потерь и категориальные признаки (название марки, тип кузова, топлива, трансмиссии и объем двигателя), после чего начинается ее обучение на обучающей выборке (X_train, y_train):

```
X = df.drop('price', axis=1)
y = df['price']
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y,
test_size=0.2, random_state=42)
cat_features = ['brand', 'bodyType', 'fuelType', 'transmis-
sion', 'engineDisplacement']
model = CatBoostRegressor(iterations=1000, learn-
ing_rate=0.1, depth=8, loss_function='RMSE', cat_fea-
tures=cat_features, one_hot_max_size=255)
model.fit(X_train, y_train, verbose=100)
```

Для оценки качества регрессии будет использоваться метрика R^2 [1]. Коэффициент детерминации (R^2) – это статистический показатель, который оценивает долю дисперсии одной переменной, объяснимой

изменениями другой или нескольких других переменных в контексте модели регрессии. Его значение для построенной модели равно 0.94665. Это означает, что CatBoostRegressor очень хорошо описывает вариативность данных:

```
y_pred = model.predict(X_test)
r2 = r2_score(y_test, y_pred)
print(f'R^2: {r2:.5f}')
```

После того, как модель CatBoostRegressor обучилась, можно увидеть влияние (в процентах) различных признаков на прогнозируемую способность (рис. 3). Наибольшее влияние оказывают такие признаки, как количество лошадиных сил у автомобиля и его год выпуска. Наименьшее воздействие на CatBoostRegressor оказывает тип кузова.

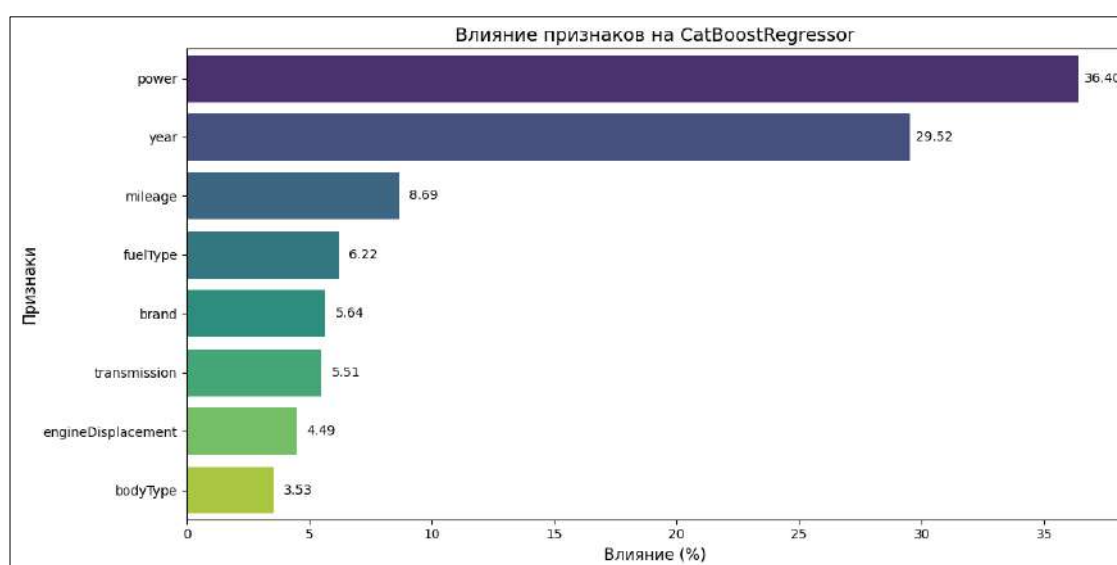


Рис. 3. Влияние признаков на CatBoostRegressor

Определив функцию `estimate_price`, которая оценивает стоимость автомобиля на основе входных данных, а затем используя ее для оценки стоимости случайного автомобиля из тестовой выборки, получим ориентировочную стоимость равную 438 895 рублям при фактической цене 427 000 рублей:

```
estimated_price = estimate_price(brand, bodyType, fuelType,
year, mileage, transmission, power, engineDisplacement)
formatted_estimated_price = f"{round(estimated_price):,} ".replace(',', ' ')
formatted_actual_price = f"{round(actual_price):,} ".replace(',', ' ')
print(f'Ориентировочная цена машины: {formatted_estimated_price} руб.')
print(f'Фактическая цена машины: {formatted_actual_price} руб.')
```

Построив диаграмму рассеяния фактических и прогнозируемых значений стоимости машины, можно сказать, что точки находятся рядом с прямой идеального соответствия – красная пунктирная линия (рис. 4) [2]. Это означает, что прогнозируемые значения модели очень близки к фактическим, что свидетельствует о высокой точности обученной модели CatBoostRegressor для прогнозирования стоимости автомобилей.

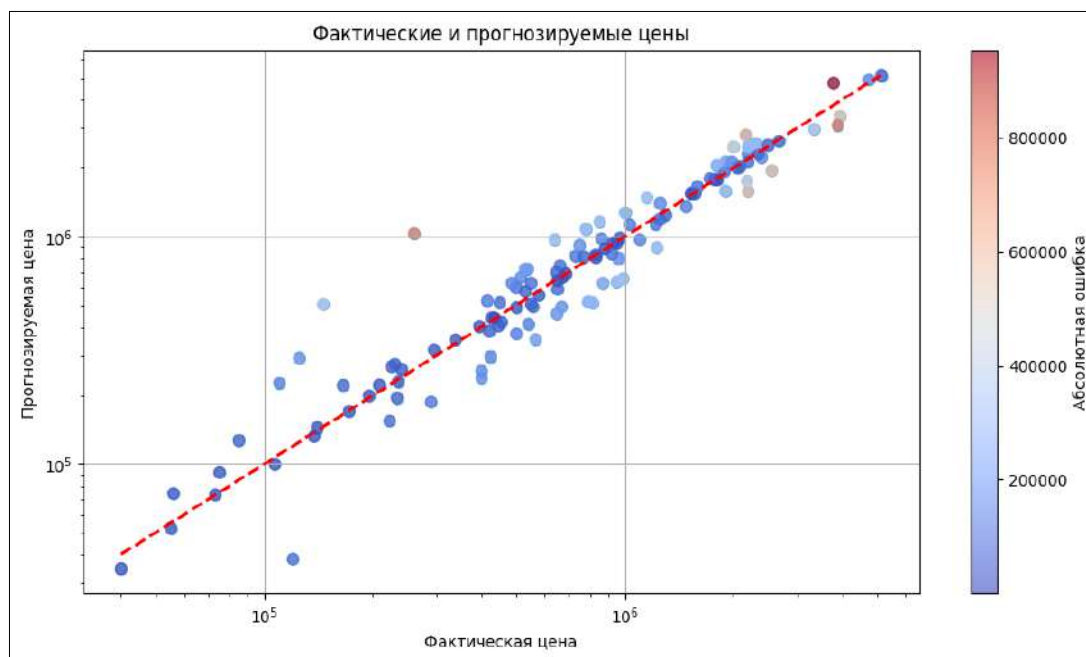


Рис. 4. Фактические и прогнозируемые цены

Применение системы машинного обучения CatBoost для прогнозирования стоимости машин показало высокую эффективность и точность. Модель CatBoostRegressor успешно обрабатывает как числовые, так и категориальные данные, предоставляя надежные и быстрые прогнозы, которые могут быть полезны как дилерам и продавцам автомобилей, так и их клиентам.

Список литературы

1. Жерон Орельен. Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn, Keras и TensorFlow: концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем : пер. с англ. 2-е изд. СПб. : Диалектика, 2020. 1040 с.
2. Плас Дж. Вандер. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение. СПб., 2018. 576 с.

ПРЕДСКАЗАНИЕ ЦЕН ЖИЛОЙ НЕДВИЖИМОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

**Максим Олегович Тимошкин¹,
Елена Геннадьевна Романова²**

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия

²Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹max.timoshkin@inbox.ru, ²romanova.elenar2016@yandex.ru

Аннотация. Машинное обучение – это активно развивающаяся область искусственного интеллекта, связанная с разработкой алгоритмов, способных к обучению на исходных данных и обобщению найденных зависимостей на новых данных. Актуальность работы заключается в том, что рынок недвижимости находится в постоянном движении и многие финансовые учреждения используют прогнозы цен на недвижимость для оценки рисков и принятия решений о выдаче кредитов, страхования и т.д. Цель работы заключается в автоматизации процесса предсказания цен жилой недвижимости по ее характеристикам с помощью методов машинного обучения. В работе применяются методы машинного обучения для предсказания цен жилой недвижимости. Была сформулирована формальная постановка задачи и произведено сравнение двух методов машинного обучения для предсказания цен жилой недвижимости. В ходе сравнения методов по скорости и качеству работы был выбран наиболее подходящий метод для решения поставленной задачи.

Ключевые слова: предсказание цен, жилая недвижимость, машинное обучение, выборка, линейная регрессия

PREDICTING RESIDENTIAL REAL ESTATE PRICES USING MACHINE LEARNING METHODS

Maxim O. Timoshkin¹, Elena G. Romanova²

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹max.timoshkin@inbox.ru, ²romanova.elenar2016@yandex.ru

Abstract. Background. Machine learning is a rapidly evolving field of artificial intelligence focused on development of algorithms capable of learning from input data and generalizing the found dependencies to new data. The relevance of this work lies in the fact that the real estate market is in constant changing, and many financial institutions use real estate price forecasts to assess risks and make

decisions on issuing loans, insurance, etc. The aim of the study is to automate the process of predicting prices of residential real estate based on its characteristics using machine learning methods. Materials and methods. The work uses machine learning methods to predict residential real estate prices. Results. A formal problem statement was formulated and a comparison of two machine learning methods for predicting residential real estate prices was conducted. Conclusions. Through the comparison of methods in terms of speed and quality of performance, the most suitable method for solving the set task was chosen.

Keywords: price prediction, residential real estate, machine learning, sampling, linear regression

Содержательная задача

Существует ряд компаний, которые занимаются покупкой и продажей жилой недвижимости в городе Мумбаи, Индия. Дано огромное количество объявлений о продаже жилья [1]. Требуется на основании некоторых данных о жилой недвижимости как можно точнее предсказывать ее цену при продаже

Данные

Генеральной совокупностью [2, 3] в данном случае будет являться совокупность всей жилой недвижимости в городе Мумбаи в данный период времени. Объектом является жилье, выставленное на продажу. Совокупность всех объектов образуют выборочную совокупность. Каждый объект обладает следующими признаками:

1. Количество комнат (включая спальню, зал, кухню) – дискретный признак (натуральное число);
2. Тип жилья – категориальный признак. Множество допустимых значений – {0: «квартира», 1: «вилла», 2: «отдельный дом», 3: «квартира-студия»};
3. Площадь жилья – непрерывный признак (вещественное число, измеряется в квадратных футах);
4. Регион жилья – категориальный признак. Множество допустимых значений – {0,1, ..., 227};
5. Статус жилья – категориальный признак. Множество допустимых значений – {0: «Готов к заселению», 1: «На стадии строительства»};
6. Новизна жилья – категориальный признак. Множество допустимых значений – {0: «Новое жилье», 1: «Вторичная продажа»};
7. Цена жилья – непрерывный признак (вещественное число, измеряется в лакхах индийских рупий).

Выборка данных была получена с помощью сбора объявлений о продаже жилой недвижимости. Жилье, находящееся в продаже

(выборка), является подмножеством всей жилой недвижимости (генеральная совокупность). Можно считать, что выборка была получена методом бесповторного отбора данных из генеральной совокупности [4]. Кроме того, были соблюдены принципы «равновозможности» и «случайности» попадания единиц в выборочную совокупность. Следовательно, обеспечена репрезентативность [5] собранных данных относительно генеральной совокупности [2]. В выборку входит жилье, которое в данный период времени уже находится в продаже. Планируется поступление новых данных – жилой недвижимости, которая в данный момент не продается, но будет выставлена на продажу в ближайшем будущем, или чью потенциальную цену необходимо оценить.

Формальная задача

Необходимо найти стратегию, которая для любого объекта из генеральной совокупности по независимым переменным («Количество комнат», «Тип жилья», «Площадь жилья», «Регион жилья», «Статус жилья», «Новизна жилья») предсказывает зависимую переменную «Цена жилья».

Разбиение выборки

Для сохранения репрезентативности были соблюдены принципы «равновозможности» и «случайности» попадания единиц в выборочную совокупность; был выбран метод бесповторного отбора [2] (табл. 1).

Таблица 1

Разбиение выборки на обучающую, валидационную и контрольную

Выборка	Абсолютный размер	Относительный размер
Исходная	76038	100%
Обучающая	45622	60%
Валидационная	15208	20%
Контрольная	15208	20%

Описательная статистика

Описательная статистика для признака «Количество комнат»

Пусть ξ_1 – дискретная случайная величина, определяющая количество комнат. Тогда оценки характеристик генеральной совокупности по исходной выборке [6] составят:

$E(\xi_1) = 2.015$ – математическое ожидание (центральный момент I порядка);

$D(\xi_1) = 0.851$ – дисперсия (центральный момент II порядка);

$\sigma(\xi_1) = 0.922$ – среднеквадратическое отклонение;

Из гистограммы распределения ξ_1 (рис. 1) видно, что мода распределения равна 2. Была построена гистограмма среднего значения целевой переменной от ξ_1 (рис. 2), из которой видно, что средняя

стоимость жилья почти всегда возрастает с увеличением числа комнат в нем.

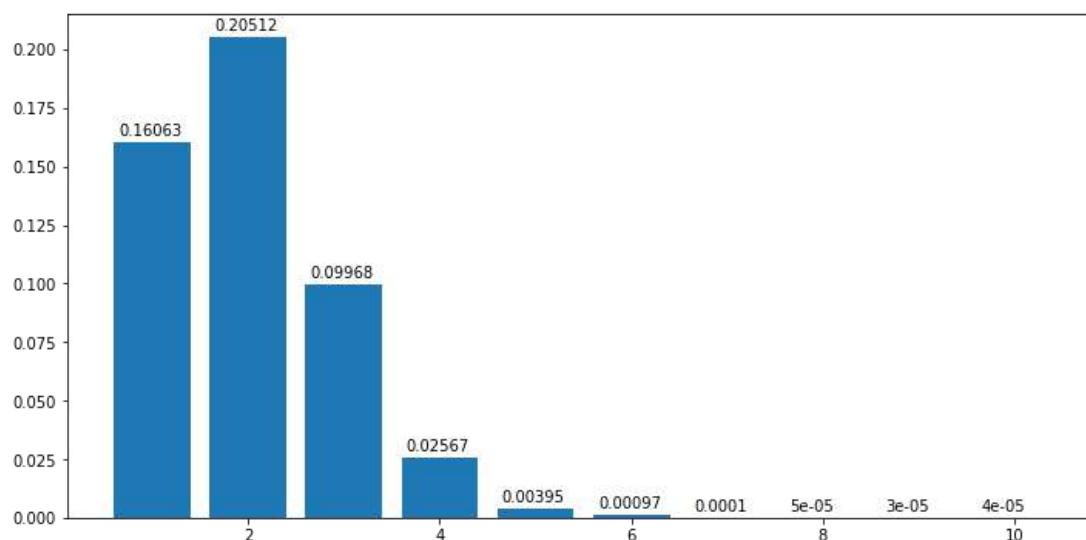


Рис. 1. Гистограмма распределения с.в. $p(\xi_1)$ на выборке данных

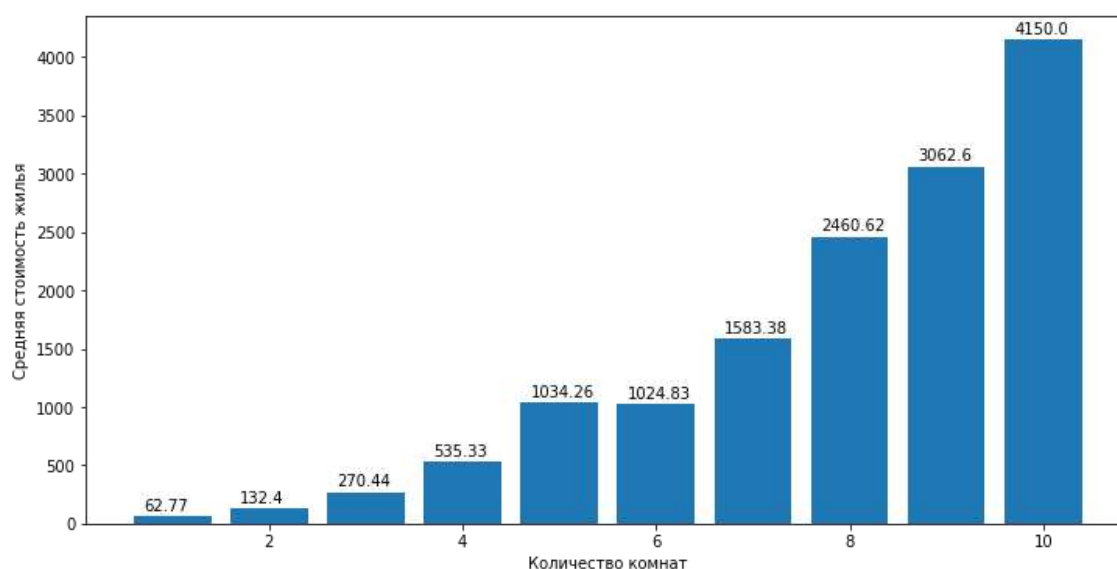


Рис. 2. Гистограмма средней стоимости жилья от числа комнат в нем для выборки данных, $\bar{y}(\xi_1)$

Описательная статистика для признака «Тип жилья»

Пусть ξ_2 – дискретная случайная величина, определяющая тип жилья («квартира», «квартира-студия», «вилла», «отдельный дом»). Из гистограммы распределения ξ_2 (рис. 3) видно, что мода распределения – «Квартира». Была построена гистограмма среднего значения целевой переменной от ξ_2 (рис. 4), из которой видно, что средняя стоимость жилья сильно зависит от типа жилья.

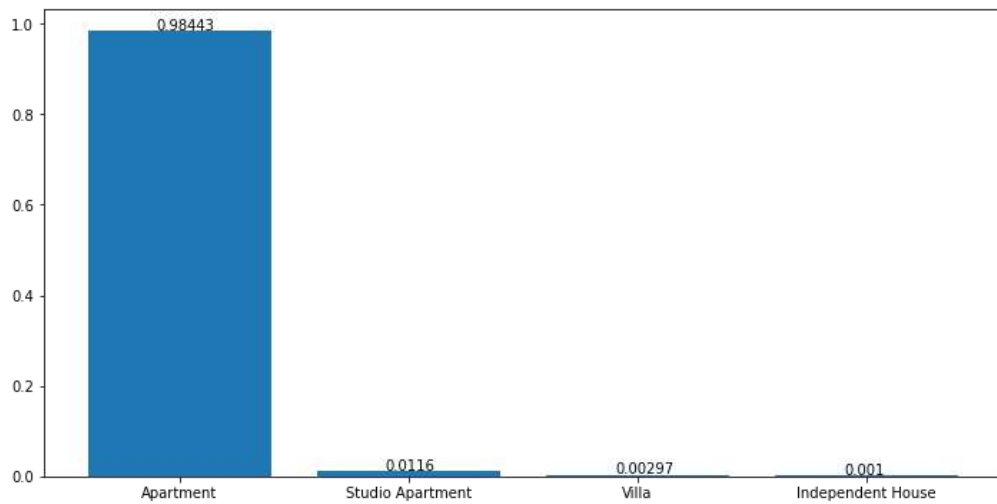


Рис. 3. Гистограмма распределения с.в. $p(\xi_2)$ на выборке данных

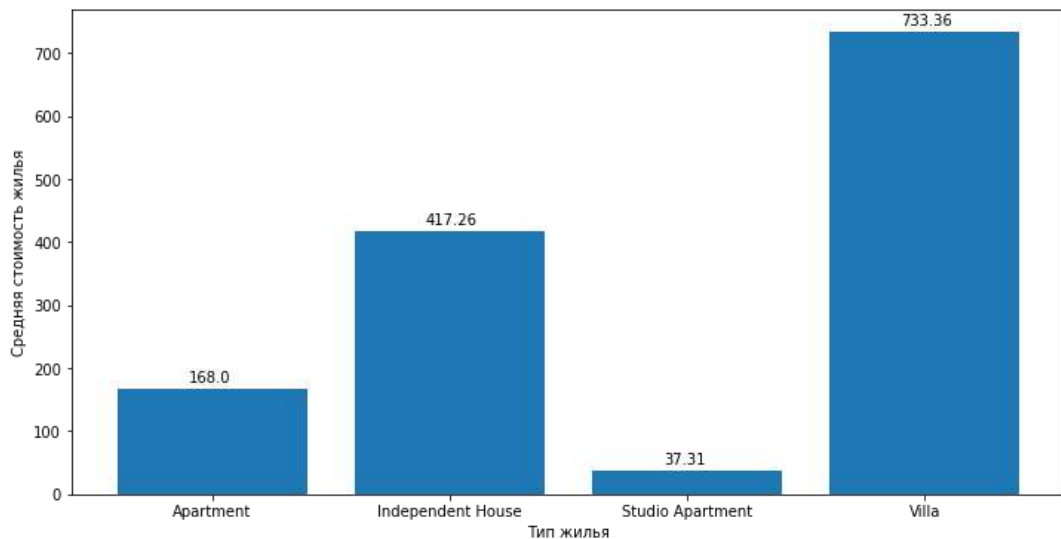


Рис. 4. Гистограмма средней стоимости дома от типа жилья на выборке данных, $\bar{y}(\xi_2)$

Описательная статистика для признака «Площадь жилья»

Пусть ξ_3 – непрерывная случайная величина, определяющая площадь жилья. Тогда оценки характеристик генеральной совокупности по исходной выборке составят:

$E(\xi_3) = 1024.5$ – матожидание (центральный момент I порядка);

$D(\xi_3) = 449270$ – дисперсия (центральный момент II порядка);

$\sigma(\xi_3) = 670.2$ – среднеквадратическое отклонение;

Была определена мода распределения $M_0 = 650$ на выборке данных. Был построен график среднего значения целевой переменной от ξ_3 (рис. 5). Видно, что средняя стоимость дома возрастает с увеличением площади жилья.

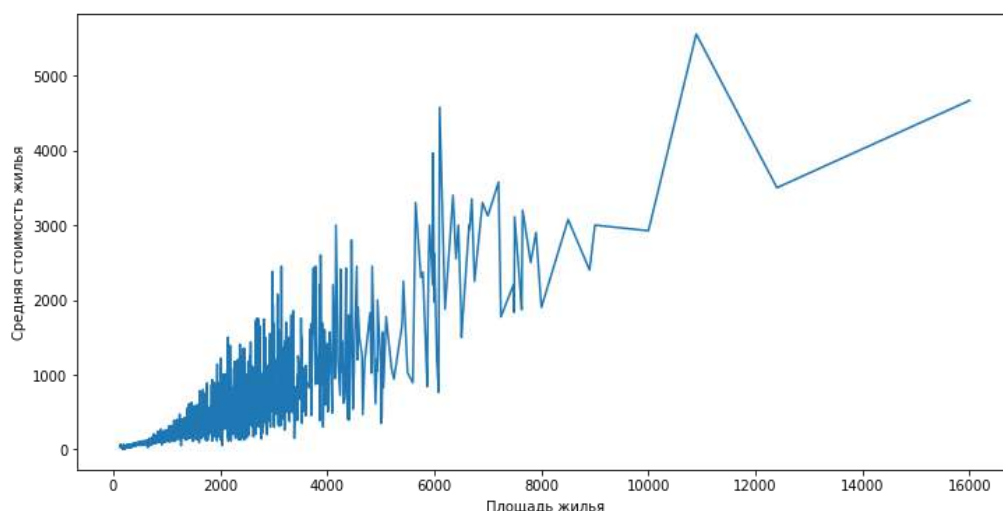


Рис. 5. График средней стоимости жилья от его площади на выборке данных, $\bar{y}(\xi_3)$

Описательная статистика для признака «Регион жилья»

Пусть ξ_4 – дискретная случайная величина, определяющая регион жилья (Всего 228 различных регионов). Была найдена мода распределения – «Thane West». Была построена гистограмма среднего значения целевой переменной от ξ_4 (рис. 6). Видно, что средняя стоимость жилья сильно зависит от его региона.

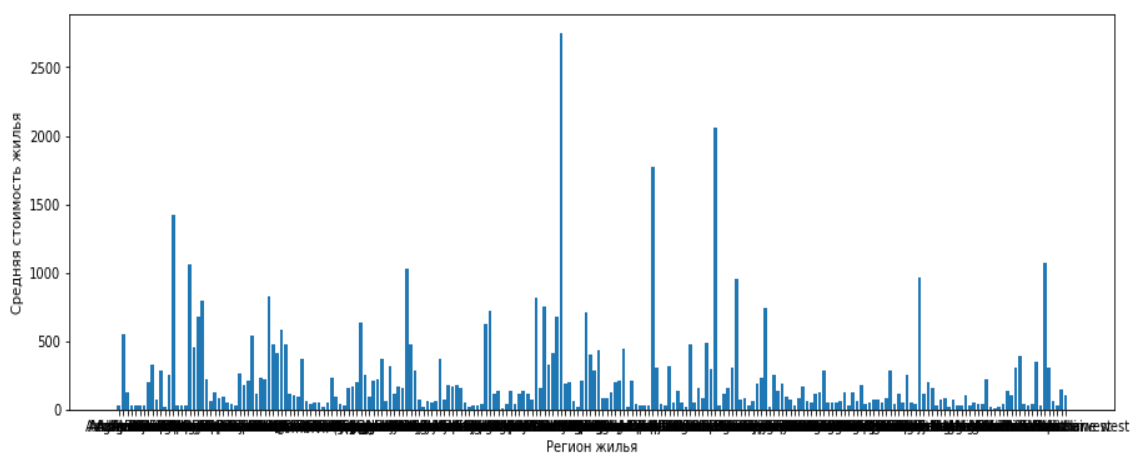


Рис. 6. Гистограмма средней стоимости жилья от типа жилья на выборке данных, $\bar{y}(\xi_4)$

Описательная статистика для признака «Статус жилья»

Пусть ξ_5 – дискретная случайная величина, определяющая статус жилья («Готов к заселению», «На стадии строительства»). Из гистограммы распределения ξ_5 (рис. 7) видно, что мода распределения – «Готов к заселению». Была также построена гистограмма среднего значения

целевой переменной от ξ_5 (рис. 8), из которой видно, что средняя цена построенного жилья немного выше жилья на стадии строительства.

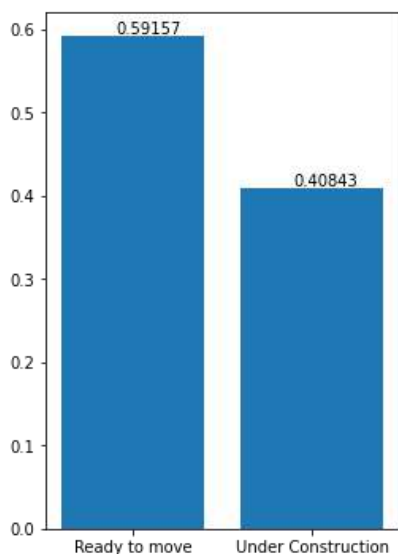


Рис. 7. Гистограмма распределения $p(\xi_5)$ на выборке данных

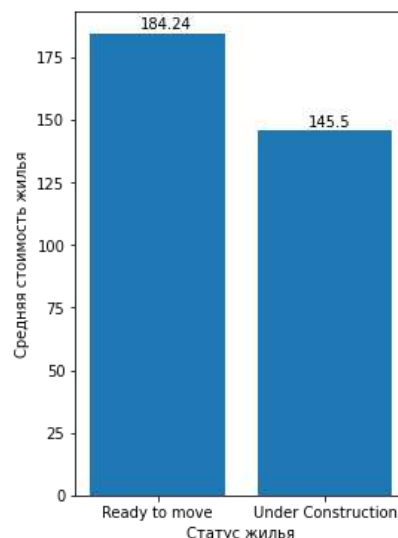


Рис. 8. Гистограмма средней стоимости дома от статуса жилья на выборке данных, $\bar{y}(\xi_5)$

Описательная статистика для признака «Новизна жилья»

Пусть ξ_6 – дискретная случайная величина, принимающая одно из двух значений («Новое жилье», «Вторичная продажа»). Из гистограммы распределения ξ_6 (рис. 9) видно, что соотношение нового жилья и жилья вторичной продажи практически равное, а из гистограммы среднего значения целевой переменной от ξ_6 (рис. 10) видно, что средняя цена жилья вторичной продажи выше.

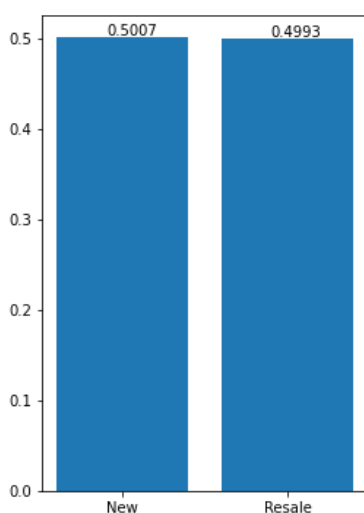


Рис. 9. Гистограмма распределения с.в. $p(\xi_6)$ на выборке данных

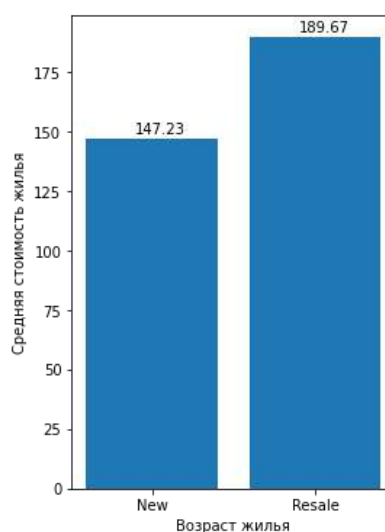


Рис. 10. Гистограмма средней стоимости дома от новизны жилья на выборке данных, $\bar{y}(\xi_6)$

Анализ до распознавания

Проверка условной независимости признаков

Коэффициент корреляции Пирсона [7] характеризует существование линейной зависимости между двумя величинами.

Пусть даны две выборки $x^m = (x_1, \dots, x_m)$, $y^m = (y_1, \dots, y_m)$; коэффициент корреляции Пирсона рассчитывается по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}},$$

где $\bar{x}, \bar{y}$ – выборочные средние x^m и y^m , s_x^2, s_y^2 – выборочные дисперсии, $r_{xy} \in [-1, 1]$.

Коэффициент корреляции Пирсона называют также теснотой линейной связи:

- $|r_{xy}| = 1 \Rightarrow x, y$ линейно зависимы;
- $|r_{xy}| = 0 \Rightarrow x, y$ линейно независимы.

Так как модуль корреляции между признаками практически всегда близок к нулю (табл. 2), то можно судить о независимости признаков.

Таблица 2

Корреляция Пирсона, рассчитанная между всеми признаками

	Количество комнат	Тип жилья	Площадь жилья	Регион жилья	Статус жилья	Новизна жилья	Цена жилья
Количество комнат	1,0	-0,04	0,79	0,63	0,14	-0,13	0,16
Тип жилья	-0,04	1,0	0,05	0,04	0,0	-0,04	0,01
Площадь жилья	0,79	0,05	1,0	0,76	0,15	-0,23	0,24
Регион жилья	0,63	0,04	0,76	1,0	0,02	-0,09	0,10
Статус жилья	0,14	0,0	0,15	0,02	1,0	-0,10	0,09
Новизна жилья	-0,13	-0,04	-0,23	-0,09	-0,10	1,0	-0,56
Цена жилья	0,16	0,01	0,24	0,10	0,09	-0,56	1,0

Параметрический подход

В качестве параметрического метода [8] был взят метод линейной регрессии. Модель метода линейной регрессии выглядит следующим образом:

$$a_{\theta}(x) = \langle \theta, x \rangle,$$

где $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_d)$ – вектор параметров модели;
 $x = (1, x_1, \dots, x_d)$ – вектор значений признаков объекта;
 $\{a(\cdot; \theta) \mid \theta \in \Theta\}, \Theta \in \mathbb{R}^d$ – параметрическое семейство;
 d – количество признаков объекта.

Среднее время обучения модели составило 820 миллисекунд.

В качестве оценок показателей качества были взяты различные метрики качества модели в задаче регрессии [9]:

- Средняя абсолютная ошибка:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_{\theta}(x_i) - y_i|;$$

- Корень из средней квадратичной ошибки:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_{\theta}(x_i) - y_i)^2};$$

- Коэффициент детерминации (табл. 3):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_{\theta}(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Таблица 3

Оценки показателей качества для модели линейной регрессии

Выборка/метрика	MAE	RMSE	R^2
Обучающая выборка	53,9	106,3	0,7660
Валидационная выборка	52,9	105,8	0,7658

Для получения оценки показателя качества методом скользящего контроля (кросс-валидации [10]), выборка была разбита на $N = 8$ фолдов. Для каждого фолда k был рассчитан коэффициент детерминации R_k^2 . Для получения общей оценки показателя качества методом кросс-валидации, полученные коэффициенты были усреднены:

$$SV = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_k^2 = 0.762.$$

Непараметрический подход

Непараметрический подход [11] не делает предположений об определенных параметрических семействах вероятностных распределений. В качестве непараметрического метода был взят метод -ближайших соседей. Для задачи регрессии модель – ближайших соседей выглядит следующим образом:

$$a(x) = \frac{1}{K} y_k(x),$$

где K – количество ближайших соседей; $y_k(x)$ – k -й ближайший сосед для объекта x .

В данном случае неуместно говорить о времени обучения, т.к. обучающая выборка просто помещается в память. Однако, следует отметить, что очень существенно возрастает время, необходимое для предсказания (≈ 85 секунд), т.к. сложность каждого предсказания составляет $O(n)$. Аналогичным образом была получена оценка показателя качества методом кросс-валидации ($N = 8$): $SV = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_k^2 = 0.705$ (табл. 4).

Таблица 4

Оценки показателей качества для модели – ближайших соседей

Выборка/метрика	MAE	$RMSE$	R^2
Обучающая выборка	39,33	98,02	0,8
Валидационная выборка	47,98	119,77	0,7

Сравнение и выводы

Поставленная задача предсказания цены жилья решалась двумя методами машинного обучения: методом линейной регрессии (параметрический подход) и методом -ближайших соседей (KNN) (непараметрический подход). Выбор методов машинного обучения обусловлен тем, что в настоящее время они показывают хорошие результаты в самых различных областях [12, 13].

Для данной задачи и выборки данных скорость работы метода линейной регрессии оказалась значительно выше (среднее время обучения составило 820 мс, время предсказания около 15 мс) по сравнению с методом – ближайших соседей (время предсказания составило около 85 секунд). С помощью метода KNN удалось достигнуть более высокого качества только в метрике MAE , а в метриках R^2 и $RMSE$ качество оказалось выше у метода линейной регрессии (табл. 5).

Таблица 5

Сравнение качества работы методов в различных метриках на валидационной выборке

Метод/метрика	MAE	$RMSE$	R^2
Линейная регрессия	52,9	105,8	0,7658
KNN	47,98	119,77	0,7

Таким образом, метод линейной регрессии показал более привлекательные результаты для данной задачи: меньшее время на обучение модели и предсказание и лучшее качество в метриках R^2 и $RMSE$ (табл. 6).

Таблица 6

Сравнение качества работы методов в различных метриках на контрольной выборке

Метод/метрика	MAE	$RMSE$	R^2
Линейная регрессия	52,76	98,67	0,78
KNN	47,20	112,87	0,71

Для получения доверительного интервала [14] оценки качества линейной регрессии (победителя) в метрике R^2 использовался приближенный метод *bootstrap*. С помощью него было сгенерировано 500 *bootstrap*-выборок, на каждой из которых был обучен метод линейной регрессии, и оценено качество в метрике R^2 на контрольной выборке. Был задан доверительный уровень $p = 0.95$ и рассчитан соответствующий доверительный интервал $I = [0.779, 0.790]$.

Таким образом, в ходе выполнения данной работы была сформулирована формальная постановка задачи и проведена описательная статистика. Для решения поставленной задачи были применены два метода машинного обучения: метод линейной регрессии и метод –ближайших соседей. В ходе сравнения методов по скорости и качеству работы для решения данной был выбран метод линейной регрессии.

Список литературы

1. Mumbai House Prices. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/draavidvaishnav/mumbai-house-prices?select=Mumbai+House+Prices.csv> (дата обращения: 07.02.2024).
2. Полякова В. В., Шаброва Н. В. Основы теории статистики : учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. Екатеринбург, 2015.
3. Генеральная совокупность. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Генеральная_совокупность (дата обращения: 07.02.2024).
4. Виды статистического наблюдения в зависимости от охвата единиц исследуемой совокупности. URL: <https://publications.hse.ru/mirror/pubs/share/folder/03ifxtdlb5/direct/80281251> (дата обращения: 07.02.2024).
5. Репрезентативность. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Репрезентативность> (дата обращения: 07.02.2024).
6. Характеристики распределений. URL: <http://www.sevin.ru/fundecology/literature/tv3.html> (дата обращения: 07.02.2024).

7. Коэффициент корреляции Пирсона. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Коэффициент_корреляции_Пирсона (дата обращения: 07.02.2024).

8. Параметрическое семейство. URL: https://wiki5.ru/wiki/Parametric_family (дата обращения: 07.02.2024).

9. Оценка качества в задачах классификации и регрессии. URL: https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Оценка_качества_в_задачах_классификации_и_регрессии (дата обращения: 07.02.2024).

10. Кросс-валидация. URL: <https://academy.yandex.ru/handbook/ml/article/kross-validaciya> (дата обращения: 07.02.2024).

11. Непараметрическая статистика. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Непараметрическая_статистика (дата обращения: 07.02.2024).

12. Тимошкин М. О., Романова Е. Г. Применение метода Q-обучения для оптимизации производств // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XVI Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2021. С. 100.

13. Тимошкин М. О., Романова Е. Г. Применение метода глубокого Q-обучения для обучения агентов в логических играх // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XVI Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. Пенза, 2022. С. 199.

14. Оценки параметров генеральной совокупности. Доверительные интервалы. URL: <https://reshator.com/sprav/algebra/10-11-klass/ocenki-parametrov-generalnoj-sovokupnosti-doveritelnye-intervaly> (дата обращения: 07.02.2024).

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Егор Евгеньевич Читоркин

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва, Самара, Россия
egor.chitorckin@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются различные архитектуры нейронных сетей для моделирования дифракции на цилиндре кругового сечения как тестовом объекте. При этом исследуется зависимость точности моделей от свойств обучающей выборки.

Ключевые слова: глубокое обучение, нейронные сети, сверточные нейронные сети, уравнения Максвелла

Благодарности: научному руководителю профессору Д. Л. Головашкину за постановку задачи и внимание к работе.

USAGE OF NEURAL NETWORKS FOR MODELING THE PHENOMENON OF ELECTROMAGNETIC RADIATION DIFFRACTION ON CYLINDRICAL OBJECTS

Egor E. Chitorkin

Samara National Research University named after Academician
S. P. Korolev, Samara, Russia
egor.chitorckin@yandex.ru

Abstract. Various architectures of neural networks for modeling diffraction on a circular cylinder as a test object are considered. At the same time, the dependence of the accuracy of the models on the properties of the training sample is investigated.

Keywords: deep learning, neural networks, convolutional neural networks, Maxwell's equations

Acknowledgments: gratitude to the scientific supervisor, Professor D. L. Golovashkin, for setting the task and paying attention to the work.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется решению уравнений в частных производных, в частности – уравнений Максвелла, с помощью нейронных сетей [1–3]. Данный подход используется как для моделирования рассеивания волны объектами [1], так и для изучения

свойств объектов, на которых происходит дифракция (коэффициент пропускания [2], Q-фактор фотонного кристалла [3]).

Так, например, в работе [1] рассматривается задача рассеивания плоской волны диэлектрическими объектами различной формы. Авторами показано, что для решения данной задачи подходит архитектура нейронной сети U-Net с residual-блоками в кодере и декодере, которая обеспечивает высокую точность. Однако, авторы не исследуют вопрос составления обучающей выборки, а также изучения влияния свойств обучающей выборки на точность модели.

В ходе настоящей работы на примере дифракции плоской электромагнитной волны на цилиндре кругового сечения исследуется зависимость точности различных моделей от дискретизации сеточной области и объема обучающей выборки. Помимо этого, изучается вопрос выбора архитектуры нейронной сети для задач различного вида.

Описание рассматриваемых архитектур нейронных сетей

Следуя за работой [1], будем считать, что в роли входных данных выступает матрица, содержащая информацию о материале и геометрических размерах цилиндра, а в роли выходных данных – изображение, описывающее распределение интенсивности электрического поля после дифракции плоской волны на цилиндре.

В качестве первой архитектуры рассмотрим архитектуру, описанную в [1]: U-Net с residual-блоками в кодере и декодере.

Опираясь на [2], рассмотрим следующую архитектуру. Сеть состоит из 4 блоков, включающих в себя свёрточный слой с ядром 3×3 и MaxPooling-слой, после которых идет полносвязный слой, Dropout-слой, еще один полносвязный слой активации и Reshape-слой.

Опираясь на [3], рассмотрим другую архитектуру. Сеть состоит из кодера (2 блока, включающие в себя сверточный слой, AveragePooling-слой и слой нормализации батча), трех полносвязных слоев, декодера (2 блока аналогичных блокам кодера за исключением замены сверточных слоев на слои обратной свертки), двух полносвязных слоев и Reshape-слоя.

Описание датасетов и обучение нейронных сетей

Для исследования был подготовлен набор датасетов двух типов. Для датасетов первого типа была зафиксирована длина падающей волны λ и радиус цилиндра R , а значения показателя преломления цилиндра менялись от $n = 1,46$ до $n = 1,9$, то есть рассматривается диапазон всех показателей преломления различных стёкол. Для датасетов второго типа фиксировался материал цилиндра и длина падающей волны λ , а радиус цилиндра менялся в пределах от $R = 0,1\lambda$ до $R = 10\lambda$. Такой диапазон выбран, чтобы учесть случаи, когда радиус цилиндра слишком мал по сравнению с длиной падающей волны, и обратные

случаи, когда радиус цилиндра слишком велик и внутри цилиндра возникает сложная дифракционная картина. Для корректности отображения данных расчетная область была ограничена шириной 20λ . В отличие от работ [1–3], где для подготовки обучающих данных использовались математические пакеты, реализующие численные методы решения уравнений Максвелла, которые вносят свою погрешность в решение, в данном случае генерация датасетов была произведена с помощью аналитического решения данной задачи [4], реализованного на языке Python.

Далее все нейросети были обучены на каждом из сгенерированных датасетов. Обучение любой сети длилось 400 эпох. При обучении использовался оптимизатор Adam и (по аналогии с работой [1]) функция потерь

$$Loss = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (y_{true}(i, j) - y_{net}(i, j))^2,$$

а ошибка вычислялась по формуле

$$Error = \frac{1}{N^2} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |y_{true}(i, j) - y_{net}(i, j)|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |y_{true}(i, j)|} \times 100\%,$$

где N – размер изображения; y_{true} – аналитическое решение; y_{net} – решение, полученное с помощью нейронной сети.

Анализ результатов

В первую очередь была исследована зависимость ошибки решения нейронной сети от дискретизации сеточной области. Для датасетов обоих типов (рис. 1) наблюдается тенденция к уменьшению ошибки при измельчении сеточной области для всех предложенных архитектур.

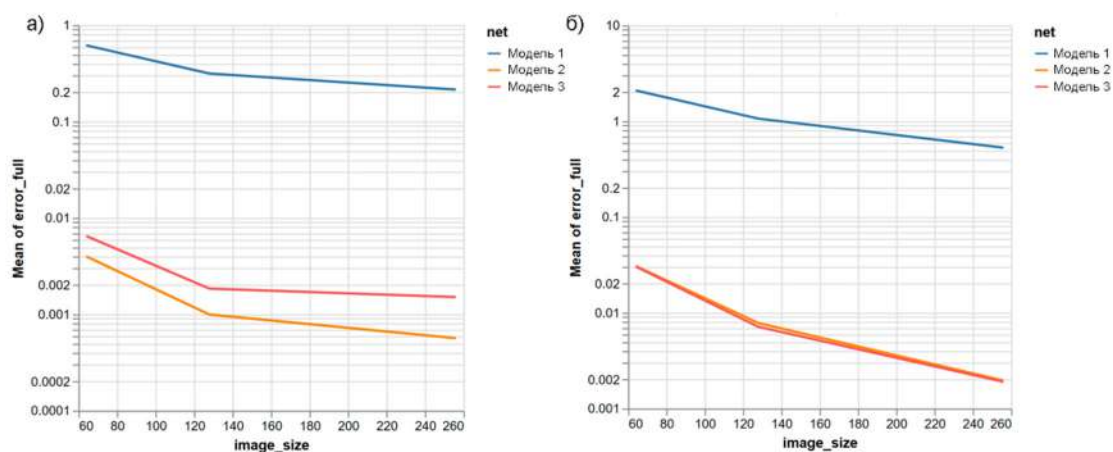


Рис. 1 – Зависимость ошибки модели от дискретизации при изменении:
а) материала цилиндра; б) радиуса цилиндра

Далее рассмотрим зависимость ошибки от объема обучающей выборки. Для начала рассмотрим инференсы моделей на примере поиска распределения электрического поля при $n = 1.9$ (рис. 2).

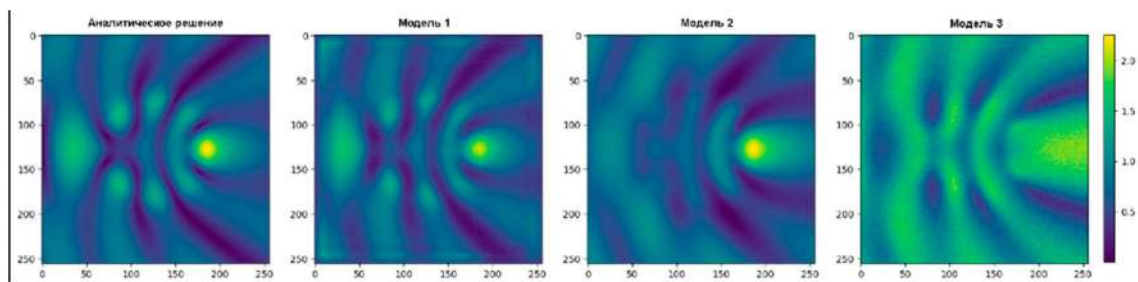


Рис. 2. Инференсы моделей, обученных на датасете первого типа

Из рисунка видно, что наиболее точное распределение показывает модель 1. На примере этой модели (рис. 3) изучим зависимость точности от объема обучающей выборки (для остальных моделей выявленные зависимости также верны).

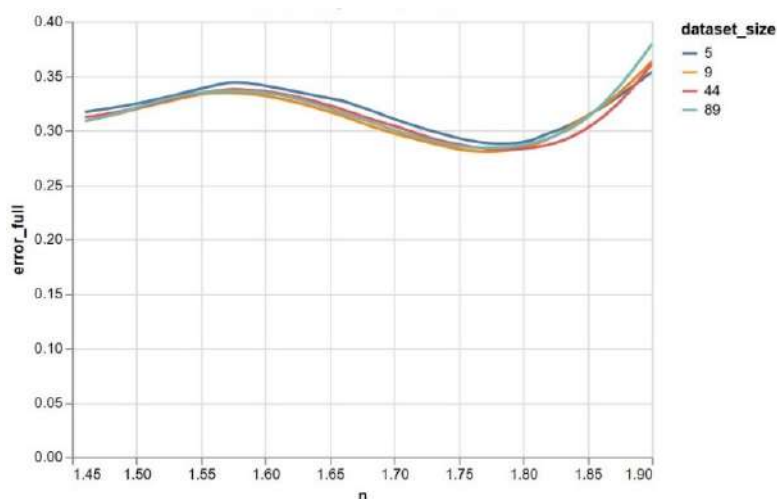


Рис. 3. Зависимость точности модели от n и объема обучающей выборки

Видим, что сеть можно обучать на малом количестве точных решений и при этом не терять высокую точность модели при всех рассматриваемых значениях показателя преломления n . Теперь же рассмотрим результаты обучения моделей для датасета второго типа на примере случая $R = 0.2\lambda$ (рис. 4).

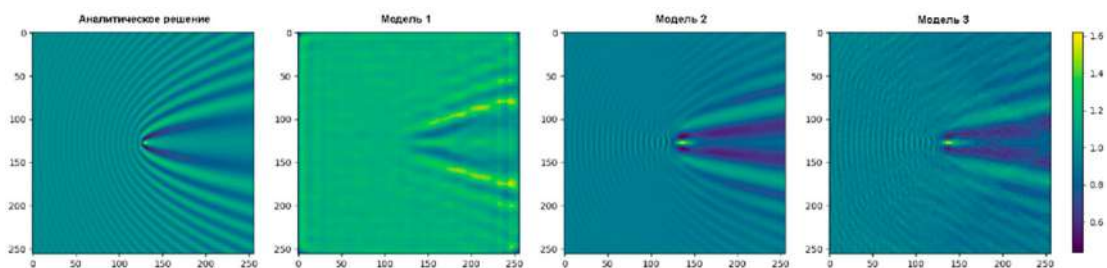


Рис. 4. Инференсы моделей, обученных на датасете второго типа

Рассмотрим зависимость ошибки от соотношения между радиусом цилиндра и длиной падающей плоской волны (рис. 5).

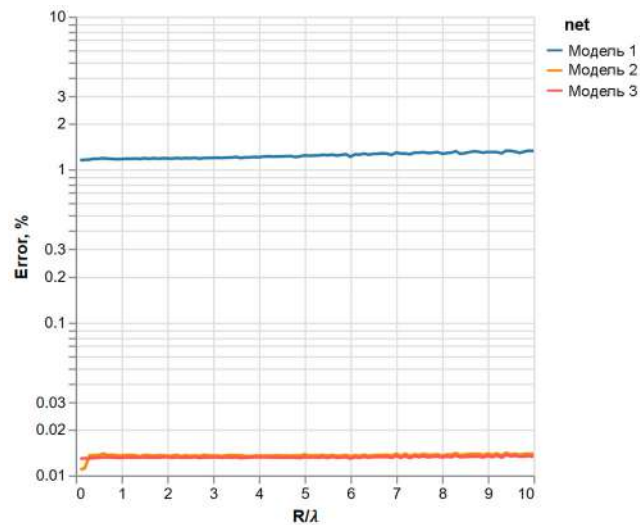


Рис. 5. Зависимость ошибки от соотношения между радиусом цилиндра и длиной падающей волны

Из графика видно, что ошибка остается практически постоянной независимо от данного соотношения, что говорит о хорошей обучаемости модели.

Выводы

Таким образом, рассмотренные модели подходят для решения задачи дифракции плоской волны на цилиндре кругового сечения, обеспечивая при этом ошибку менее 1 %. Установлено, что для достижения необходимого качества модели достаточно небольшого объема обучающих данных. Также установлено, что использование более мелких сеток при обучении позволяет повысить точность модели и получить более гладкое решение. При этом модель, описанная в [1], наилучшим образом подходит для задач, в которых радиус цилиндра близок к длине падающей волны, так как наиболее близко аппроксимирует дифракционную картину внутри цилиндра. В случаях, когда радиус цилиндра либо сильно мал, либо сильно велик по сравнению с длиной падающей волны, наиболее адекватно показывает себя модель, описанная в [2]. Модель, описанная в [3], показывает себя хуже описанных аналогов для задач обоих типов.

Список литературы

1. Qi S., Wang Y., Li Y. [et al.]. Two-Dimensional Electromagnetic Solver Based on Deep Learning Technique // IEEE Journal on Multiscale and

Multiphysics Computational Techniques. 2020. Vol. 5. P. 83–88. doi: 10.1109/JMMCT.2020.2995811

2. Kim W., Seok J. Simulation acceleration for transmittance of electromagnetic waves in 2D slit arrays using deep learning // Scientific Reports. 2020. Vol. 10, iss. 1. P. 10535. doi: 10.1038/s41598-020-67545-x

3. Li R., Gu X., Li K. [et al.]. Deep learning-based modeling of photonic crystal nanocavities // Optical Materials Express. 2021. Vol. 11, № 7. P. 2122–2133. doi: 10.1364/OME.425196

4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. 2-е изд. М. : Наука, 1973. 720 с.

7. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 378+004.4

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ ОКАЗАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ ПРИ РАБОТЕ С ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ УНИВЕРСИТЕТА

Иван Валерьевич Игошин

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
vanek05042001@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены вопросы использования и дальнейшего развития информационной системы Пензенского государственного университета. Обозначены проблемы оказания технической поддержки, возникающие у пользователей при работе с электронной информационной образовательной средой Пензенского государственного университета. Обозначена актуальность разработки подсистемы оказания консультативных услуг в рамках текущей информационной системы.

Ключевые слова: высшее образование, информационная система, информационные технологии, электронная информационно-образовательная система, техническая поддержка

EDUCATIONAL PROCESS SUPPORT SUBSYSTEM IN THE INFORMATIONAL SYSTEM OF UNIVERSITY

Ivan V. Igoshin

Penza State University, Penza, Russia
vanek05042001@mail.ru

Abstract. The issues of the use and further development of the Penza State University information system are considered. The problems of providing technical support that arise when users work with the Electronic information educational environment of Penza State University are identified. The relevance of the development of a subsystem for the provision of advisory services within the framework of the current information system is indicated.

Keywords: higher education, information system, information technology, electronic information and educational system, technical support

В настоящее время в соответствии с ФГОС ВО университеты РФ используют в образовательном процессе электронную информационную образовательную среду (ЭИОС). В Пензенском государственном университете (ПГУ), на основе свободно распространяемого программного обеспечения с открытым кодом разработана. ЭИОС, отвечающая всем необходимым требованиям. Ее пользователями являются все студенты университета, преподаватели и сотрудники ВУЗа. Структура ЭИОС ПГУ, ее основные функции и возможности рассмотрены в [1, 2]. Весь персонал университета, частности, учебно-вспомогательный персонал, преподаватели, а также сотрудники управленческих подразделений прошли обучение с целью повышения компетенций использования ЭИОС в процессе его внедрения.

Функционал ЭИОС непрерывно расширяется в соответствии с возникающими задачами, которые необходимо решать университету. Решаемые задачи имеют разные степени сложности, и, следовательно, если задача относится к разряду сложных, то использование функционала информационной системы, решающего данную задачу, осложняется тем, что зачастую работа с интерфейсом такой задачи может требовать серьезной подготовки со стороны персонала университета.

При возникновении проблем у пользователей при работе в информационной системе следует учитывать, что сотрудник мог использовать тот или иной функционал в первый раз или после длительного периода времени, когда данные возможности ЭИОС не были задействованы этим пользователем. Наиболее сложные проблемы возникают в таких интерфейсах, которые реализуют функционал, которые использует наибольшее количество сотрудников, имеющих разные функциональные роли в системе и уровни владения её инструментами. Однако и при использовании более-менее простых интерфейсов возникает множество проблем, которые чаще всего возникают при решении наиболее распространённых задач, стоящих перед преподавателями и другим персоналом.

В [3] предложено создать подсистему, которая будет взаимодействовать с пользователем и оказывать услуги консультативного характера. Была определена уместность использования для этой задачи нейронной сети, которая через бота будет помогать сотрудникам решать возникшие при использовании ЭИОС проблем. В данный момент, при возникновении каких-либо сложностей, пользователя могут обратиться в службы технической поддержки, методической поддержки, а также подробно описать возникшую проблему на специальных форумах ЭИОС, которые были созданы для консультации пользователей. Эффективность таких механизмов решения, в большинстве случаев, сложно поддать сомнению, но скорость оказания консультаций, несомненно, может быть не всегда оптимальной, особенно если одновременно приходит слишком много вопросов от пользователей.

Следует учитывать, что многие вопросы от пользователей могут повторяться или быть однотипными. В таком случае, сотрудникам, которые оказывают помощь пользователям ЭИОС, приходится тратить время на решение, по сути, одной и той же задачи, только в интересах разных людей. Данное время могло быть потрачено на решение действительно сложных задач, которые невозможно выполнить с помощью автоматизации. Предлагаемый механизм сможет решать подобные однотипные задачи и оказывать консультации пользователям по вопросам, которые не требуют обязательного участия человека при их решении.

Доказательством актуальности разработки предлагаемой подсистемы поддержки может служить результат проверки обращений пользователей на форумах ЭИОС по загрузке ресурсов и работе со студентами. Анализ показывает, что вопросы у пользователей системы возникают практически по всем функциональным возможностям системы. Причем большая часть вопросов связана со стандартными ситуациями использования, например, почему именно так выставлена оценка в соответствии с балльно-рейтинговой системой, как выставить добор баллов, как увеличить объем прикрепляемого файла, почему не видно дисциплину или группу и т.п. [3]. Данные ситуации, как правило, имеют несколько путей решения, которые могут быть указаны пользователям не только со стороны сотрудников, но и стороны автоматических средств.

Таким образом, в данной статье были проанализированы проблемы оказания технической поддержки при работе с информационной системой университета, а также была обозначена актуальность создания обслуживающей подсистемы поддержки на основе нейронной сети для решения вопросов, связанных с оказанием консультаций пользователям ЭИОС.

Список литературы

1. Кревский И. Г., Глотова Т. В. Поддержка персонализации обучения и взаимодействия с работодателями на основе ЭИОС университета // Проблемы управления и моделирования в сложных системах : тр. XXI Междунар. науч. конф. Самара, 2019. С. 429–434.
2. Кревский И. Г., Антонов А. В., Деев М. В. [и др.]. Управление внедрением информационной системы вуза // Новые информационные технологии и системы : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 20–21 ноября 2018 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. С. 228–231.
3. Игошин И. В., Глотова Т. В., Ширканов А. В. Подсистема поддержки образовательного процесса в информационной системе университета : сб. науч. ст. по материалам XX Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 80-летию юбилею Пензенского государственного университета. Пенза, 2023. С. 9–12.

РОЛЬ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧ В ФОРМИРОВАНИИ ДЕЙСТВИЯ ПО РАСПОЗНАВАНИЮ ОБРАЗА У СТУДЕНТОВ

Наталья Владимировна Наземнова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
natalianazemnava@yandex.ru

Аннотация. Представлены многокомпонентные упражнения и задачи, способствующие формированию у студентов действия по распознаванию образа. Рассмотрена система упражнений, связанных с понятием первообразной. Данная система позволяет выявить уровень усвоения студентами как теоретического, так и практического материала.

Ключевые слова: многокомпонентное упражнение, распознавание образа, функция, первообразная, проблемная ситуация

THE ROLE OF A MULTICOMPONENT EXERCISE AND TASKS IN THE FORMATION OF AN IMAGE RECOGNITION ACTION FOR STUDENTS

Natalia V. Nazemnova

Penza State University, Penza, Russia
natalianazemnava@yandex.ru

Abstract. This article deals with multicomponent exercises and tasks contributing to the formation of student's image recognition action. The part of the system of such exercises related to the notion of derivative is reviewed in the article. The significance of this system

Is that it allows to identify the students level of the assimilation of the material both theoretical and practical.

Keywords: a multicomponent exercise, image recognition, function, primitive, a problematic situation

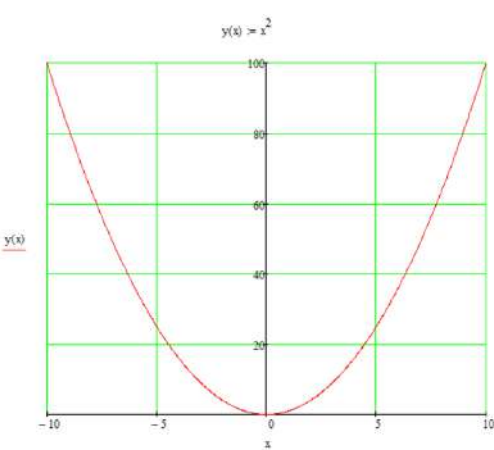
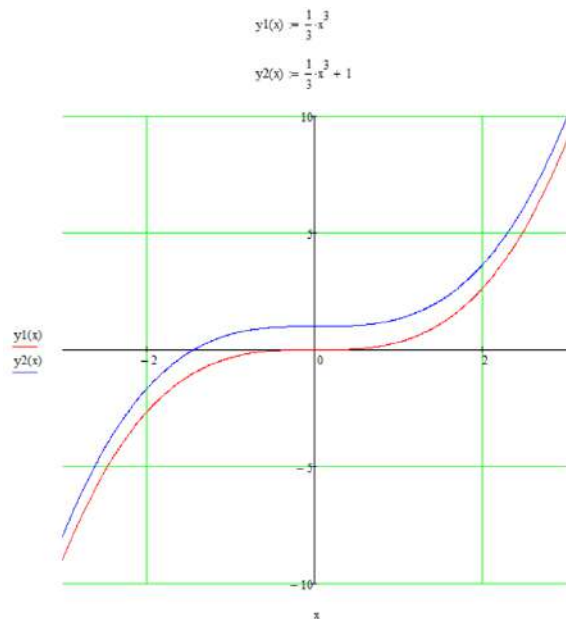
Исследуем роль многокомпонентных упражнений и задач, способствующих формированию у студентов действия по распознаванию образа. В ходе выполнения таких заданий студенты отрабатывают умения и навыки по применению метода в нестандартных ситуациях. Следует отметить, что обучение студентов поиску решения задач,

связанных с изучением одной и той же функции, является одним из наиболее эффективных приемов действия по распознаванию образа. Нами разработана система многокомпонентных упражнений, способствующих формированию умения делать выводы, получать различные следствия из условия задачи. Значимость разработанной системы состоит в том, что она позволяет выявить усвоения студентом как теоретического материала, так и уровень применения его к разрешению конкретных проблемных ситуаций. Проиллюстрируем некоторые из упражнений, входящих в разработанную систему.

Например, при изучении темы: «Определение первообразной» можно применить такие упражнения и задачи.

Пример 1

Найдите первообразную функции:

а) функции $y=x^2$	
$f(x) = x^2$	$F(x) = 1/3x^3 + C$
б) постройте графики данных функций	
$D(f) = (-\infty; +\infty).$ $E(f) = [0; +\infty).$ возрастает $(0; +\infty).$ убывает $(-\infty; 0).$ $Y_{\min} = 0$, при $x = 0$	$D(f) = (-\infty; +\infty).$ $E(f) = (-\infty; +\infty).$ возрастает $(-\infty; +\infty).$ $Y_{\min}$ и $Y_{\max}$ не существует Если $C = 0$, то $F(x) = 1/3x^3 + 0$ Если $C = 1$, то $F(x) = 1/3x^3 + 1$
	
в) сравните графики функций, сделайте выводы.	

Пример 2. Найдите первообразную функции $y = \cos x$

$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
Исследуйте и постройте эти функции.	
$D(f) = (-\infty; +\infty)$. $E(f) = [-1; +1]$. $Y_{\max} = 1$, при $x = 2\pi n$ $Y_{\min} = -1$, при $x = \pi + 2\pi n$. Функция возрастает -1 , до 1 . Функция убывает 0 , до 1	$D(f) = (-\infty; +\infty)$. $E(f) = [-1; +1]$. $Y_{\max} = 1$, при $x = \pi/2 + 2\pi n$ $Y_{\min} = -1$, при $x = 3/2\pi + 2\pi n$ Функция возрастает -1 , до 1 . Функция убывает 1 , до -1
Аналогично первому примеру постройте графики функций $f(x) = \cos x$ и $F(x) = \sin x + \pi/2$.	
Сравните графики и сделайте выводы	

Пример 3

Для функции $f(x) = 3x^2 - 2$.

Найдите:

- 1) $F(x)$.
- 2) Исследуйте данную функцию на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
- 3) Постройте график данной функции $f(x) = 3x^2 - 2$.
- 4) Докажите, что функция $F(x) = x^3 - 2x + 1$ есть первообразная на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
- 5) Исследуйте данную функцию на данном промежутке.
- 6) Постройте график данной функции $F(x) = x^3 - 2x + 1$.
- 7) Сравните данные графики и сделайте соответствующие выводы.

Пример 4

- 1) Докажите, что функция $F(x) = 3x^2 + \cos x + 3$ является первообразной для функции $f(x) = 6x - \sin x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
- 2) Что означает, что $F(x) = 3x^2 + \cos x + 3$ является одной из первообразных для функции $f(x) = 6x - \sin x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$?
- 3) Укажите какие-либо функции, отличаются от $f(x)$, являющиеся первообразными для $F(x)$, если они существуют.
- 4) Исследуйте и постройте графики данных функций $F(x) = 3x^2 + \cos x + 3$ и $f(x) = 6x - \sin x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, сделайте выводы.

Подобные многокомпонентные упражнения и задачи наряду с углублением теоретических знаний также способствуют формированию умения переносить прежние знания в новые условия, повышают уровень сформированности действия по распознаванию образа [1–4].

Список литературы

1. Дорофеев С. Н. Основы подготовки будущих учителей математики к творческой деятельности. Пенза : ПензГУ, 2002. 218 с.
2. Калнин Р. А. Алгебра и элементарные функции. М. : Наука, 1964. С. 180, 455–456.
3. Саранцев Г. И. Методология методики обучения математике. Саранск : Красный Октябрь, 2001. 144 с.
4. Эрдниев П. М. Преподавание математики в школе. М. : Просвещение, 1988. 225 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СФЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ БРОКЕРОВ СООБЩЕНИЙ

Всеволод Дмитриевич Лукин¹,
Михаил Владимирович Верховский²,
Никита Иванович Барсуков³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹vs.d.lukin@gmail.com, ²mishaverxovskiy01@gmail.com, ³nikita-bar@bk.ru

Аннотация. Осуществлен поиск различных брокеров сообщений с целью определения их эффективного применения в конкретных сферах. Основными критериями эффективности являются соотношение затраченных ресурсов на развертывание и поддержку и целесообразность использования конкретного брокера в конкретных задачах. Возможности брокера должны соответствовать предъявляемым к нему требованиям. Актуальность тематики довольно высока, так как все больше приложений используют микросервисную архитектуру, где очень важно обеспечивать обмен сообщениями между отдельными сервисами. В зависимости от функциональных возможностей брокера определяется наиболее приемлемая сфера использования.

Ключевые слова: брокер сообщений, эффективность, целесообразность, архитектура, сообщения, функциональные возможности

DEFINING THE SCOPE OF APPLICATION OF MESSAGE BROKERS

Vsevolod D. Lukin¹, Mikhail V. Verkhovsky²,
Nikita I. Barsukov³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹vs.d.lukin@gmail.com, ²mishaverxovskiy01@gmail.com, ³nikita-bar@bk.ru

Abstract. A search has been carried out for various message brokers in order to determine their effective application in specific areas. The main criteria for efficiency are the ratio of resources spent on deployment and support and the expediency of using a specific broker in specific tasks. The broker's capabilities must meet the requirements imposed on him. The relevance of the topic is quite high, as more and more applications use a microservice architecture, where it is very important to ensure the exchange of messages between individual services. Depending on the functionality of the broker, the most acceptable scope of use is determined.

Keywords: message broker, efficiency, expediency, architecture, messages, functionality

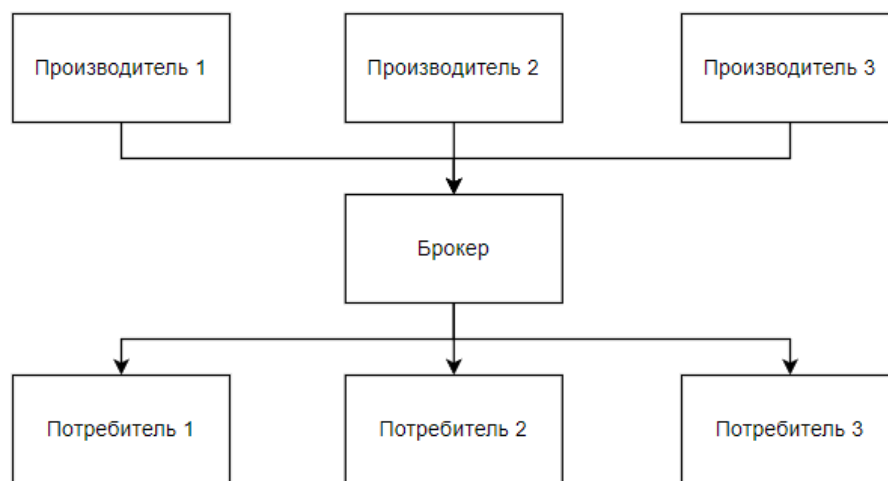
Введение

При работе с данными приходится сталкиваться с большим количеством аспектов, таких как скорость передачи, объем, срок хранения и тп. Для получения успешного результата необходимо правильно хранить, передавать и анализировать полученные данные. Все приложения постоянно участвуют в процессе формирования информации, начиная от простых записей в журнал заканчивая обменом сообщений между пользователями. Данные постоянно перемещаются. От быстроты и адаптивности этого процесса зависит эффективность работы целой организации. У информации может быть несколько производителей и несколько потребителей, если не контролировать процесс обмена сообщений, то это значительно замедлит работу приложения. Для этой цели и вводятся брокеры обработки сообщений.

1. Принцип обмена сообщениями

В процессе обмена сообщений принимает участие ряд сущностей. Одни организуют генерацию данных, другие используют их в своих определенных целях. Это производители и потребители [1]. Управляет процессом распределения сообщений брокер. Это в идеале отдельный сервер, на котором происходит вся маршрутизация данных.

В сущности, все брокеры сообщений строятся по одному принципу обмена сообщений: «Публикация/подписка». Это паттерн проектирования, где отправитель не отправляет сообщение конкретному потребителю, а определенным образом классифицирует сообщение [1]. Получатель же читает только определенные классы сообщений подписавшись на них. В такой модели всегда есть посредник, тот кто хранит сообщения в соответствующих темах и уведомляет подписчиков о наличии новых данных для получения (рисунок).



Потребители же в свою очередь могут работать по двум следующим моделям:

- pull – потребители сами периодически проверяют тему на наличие новых сообщений. Данная модель выгодна тем, что клиент способен сам регулировать собственную нагрузку.
- push – сервер сам посылает запрос к клиенту с новыми данными.

Таким образом достигается максимальная эффективность в работе с сообщениями. Брокер выполняет роль некой службы, которая отвечает за маршрутизацию потоков данных, распределение нагрузки между потребителями, хранение и быстрый доступ к данным [1, 2]. Перед тем как описать конкретные технологии организации брокеров, поговорим о жизненном цикле сообщений. Вкратце все сообщения проходят через следующие этапы:

1. Производитель генерирует данные и отправляет их брокеру.
2. Потребитель фиксирует за собой сообщение и его уникальный идентификатор.
3. Брокер помечает сообщение. Оно все ещё хранится на сервере, но становится недоступным для других потребителей.
4. Потребитель работает с данными полученными из сообщения, затем отправляет запрос на сервер, сигнализирующий об окончании работы или об ошибке.
5. После окончания работы с сообщением, брокер его удаляет. В случае возникновения ошибки, например, потребитель не смог его прочитать, сообщение отправляется снова.

2. Применение брокеров

Особое распространение данная технология получила в микросервисной архитектуре, где в отличие от монолитного приложения, каждый отдельный компонент выполняет свою особую функцию и существует отдельно от других. При такой организации очень важно, чтобы информация быстро и без потерь доходила от одного сервиса к другому. Особо это важно при конвейерной обработке данных, где необходимо иметь хорошо налаженную структуру обмена сообщениями. Сервисам не обязательно знать о существовании друг друга, они лишь получают данные от брокера, выполняют свои задачи, и отправляют их назад. Брокер позволяет перераспределять между ними нагрузку, что особенно важно в высокопроизводительных системах.

3. Анализ существующих решений

В данной работе будут рассмотрены следующие брокеры сообщений: Apache Kafka и RabbitMQ. Все они активно используются в автоматизации процесса обмена сообщениями, однако, у каждого из них есть свои особенности, достоинства и недостатки. Проведем сравнительный анализ каждого из них с целью выявить их области применения.

Начнем с брокера сообщений RabbitMQ. Это достаточно мощный сервис, широко использующийся в создании распределенных систем. Данный брокер обладает открытым исходным кодом, который к тому же реализует протокол AMQP. Производительность RabbitMQ зависит от конфигурации, однако приблизительно она составляет 50000 сообщений в секунду. Сообщение хранится до тех пор, пока потребитель не подтвердит получение. После этого оно удаляется из очереди. Помимо производителей и получателей в RabbitMQ присутствует своя особенная сущность – обменник или точка обмена (Exchange). Суть заключается в том, что все сообщения прежде чем попасть в конкретную очередь проходят через процесс маршрутизации. Брокеру необходимо определить куда именно пойдут данные, для этого в обменнике он читает ключ маршрутизации с сообщения и в зависимости от типа обменника определяет, в какую очередь попадут данные.

Поговорим более подробно про механизм маршрутизации. В RabbitMQ сообщения не заносятся сразу в очередь, вместо этого они сначала попадают в обменник, где в зависимости от ключа маршрутизации сообщение отправляется уже в конкретную очередь или очереди. Ключ представляет из себя строку, значение и формат которой определяется конкретным типом обменника. Существует 4 типа обменника, все они представлены в табл. 1.

Таблица 1

Типы обменников

Тип обменника	Описание работы	Пример ключа
Direct	Отправка в одну или несколько очередей в зависимости от значения ключа маршрутизации	«cars» «houses»
Fanout	Отправка сообщений во все очереди. Ключ игнорируется	«» «cars»
Headers	Игнорирование ключа маршрутизации. Очередь выбирается в зависимости от атрибутов в заголовке сообщения	«»
Topic	Аналогично Direct, но в данном случае ключ задается согласно шаблону	«cars.sport.ford» «cars.sport.*» «cars.sport.#»

Данный механизм предоставляет очень гибкие настройки для маршрутизации, что может быть полезно, когда необходимо отправлять сообщения на множество различных потребителей.

Достоинства:

- Открытый исходный код, а также множество пользовательских библиотек, что позволяет достаточно гибко настроить RabbitMQ под свои нужды.

- Удобный механизм маршрутизации. Необходимо лишь настроить тип обменника и он уже сам будет выбирать какие сообщения в какую очередь отправить.

Недостатки:

- Работа при высоких нагрузках. При увеличении нагрузки на кластер наблюдаются проблемы в производительности, приходится менять конфигурацию и в некоторых случаях жертвовать гибкостью.

Практически все брокеры не хранят полную очередь сообщений, потребитель прочитал данные – брокер их удалил. Однако не всем может подойти данная модель. Необходимость в хранении сообщений особо актуальна при аналитике больших данных, когда нужно сохранить информацию как для текущих задач, так и для будущих. Apache Kafka поддерживает не только хранение, но и высокую производительность при работе с большими объемами данных. Кроме того Kafka поддерживает разные модели доставки сообщений, которые подходят под разные задачи [3].

Всего таких моделей три:

- не менее одного раза – сообщение будет отправляться до тех пор, пока потребитель не подтвердит доставку;
- не более одного раза – сообщение отправляется один раз, если в процессе возникли проблемы или данные не дошли до потребителя, то повторной отправки не будет;
- точно один раз – потребитель гарантировано получит сообщение ровно один раз.

Если со всеми остальными семантиками все понятно, то «точно один раз» вызывает ряд вопросов. Например, возможна ли данная модель в принципе? Дискуссии на данную тему ведутся давно, однако разработчики Kafka определяют данную семантику следующим образом: в не зависимости от того сколько раз производитель отправит сообщение, потребитель получит его ровно один раз [4].

Так же стоит подробно остановиться на организации хранения очередей. В данном рассматриваемом брокере все данные размещаются в темы. На темы могут подписываться потребители. Сами темы состоят из разделов, обычно их столько, сколько брокеров в кластере. Это обеспечивает надежную горизонтальную масштабируемость. Потребители читают сообщения в порядке их создания. Так же он помечает уже прочитанные сообщения с помощью смещения. Это необходимо для того, чтобы потребитель мог приостанавливать и возобновлять свою работу, не забывая, в каком месте он читал. За счет разбиения темы на разделы достигается доступность данных в случае непредвиденных ситуаций, когда один из брокеров в кластере может выйти из строя. Так как в Kafka реализован механизм репликации данных, где каждый раздел

имеет несколько копий, распределенных по разным брокерам в кластере, то вероятность полной потери данных стремится к минимуму.

В связи с распределенной архитектурой обработки сообщений, Kafka обладает высокой производительностью. Брокер может с легкостью обрабатывать миллионы сообщений в секунду.

Достоинства:

- Высокая производительность. При этом она с легкостью расширяется, путем создания нового кластера и настройки репликации со старым;
- Доступ к старым сообщениям. Убирает риск потери сообщений, так как всегда можно откатить смещение и перечитать содержимое очереди;
- Контроль работы кластера через ZooKeeper. С его помощью можно оперативно получить информацию о работе всего кластера (все ли реплики распределены по брокерам, какой брокер в данный момент простаивает и тп.).

Недостатки:

- Необходимо вести учет последнего прочитанного сообщения для каждого потребителя;
- Наблюдаются проблемы с чтением поврежденных сообщений, в RabbitMQ такие сообщения заново помещаются в очередь, в Kafka они теряются навсегда.

Заключение

Представленные в данной работе брокеры, справляются с определенным набором задач. Если нужен высокопроизводительный сервер с возможностью хранения истории сообщений, то для этих целей идеально подходит Apache Kafka. Если же нужна гибкая маршрутизация сообщения и возможность написания своих моделей маршрутизации, то стоит определенно выбрать RabbitMQ.

Список литературы

1. Apache Kafka. Потокковая обработка и анализ данных. СПб. : Питер, 2019. 320 с. (Бестселлеры O'Reilly).
2. URL: <https://habr.com/ru/companies/slurm/articles/550934/> (дата обращения: 10.03.2024).
3. Kafka в действии / пер. с англ. А. Н. Киселева. М. : ДМК Пресс, 2022. 310 с.
4. Narkhede N. Exactly-once Semantics Are Possible: Here's How Apache Kafka Does It. Блог Confluent. URL: <https://www.confluent.io/blog/exactly-once-semantics-are-possible-heres-how-apache-kafka-does-it> (дата обращения: 10.03.2024).

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА РАЗНОРОДНОЙ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Михаил Владимирович Вычугжанин

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mikeabf@rambler.ru

Аннотация. Показано применение информационных технологий в медицинском образовании. Рассмотрен вопрос совместного анализа данных, полученных из различных источников с помощью соответствующих биомедицинских датчиков на примере совместного анализа электрокардиограммы и фотоплетизмограммы. Раскрыта актуальность разработки информационных систем для изучения, обобщения и анализа биомедицинских данных.

Ключевые слова: информационные технологии, медицинское образование, биомедицинские данные, электрокардиограмма, фотоплетизмограмма

THE USE OF INFORMATION TECHNOLOGY FOR THE ANALYSIS OF HETEROGENEOUS DIAGNOSTIC INFORMATION

Mikhail V. Vychugzhanin

Penza State University, Penza, Russia

mikeabf@rambler.ru

Abstract. This article is devoted to the use of information technologies in medical education. The issue of joint analysis of data obtained from various sources using appropriate biomedical sensors is considered on the example of joint analysis of an electrocardiogram and a photoplethysmogram. The relevance of the development of information systems for the study, generalization and analysis of biomedical data is shown.

Keywords: information technology, medical education, biomedical data, electrocardiogram, photoplethysmogram

Информационные технологии получают широкое распространение в различных областях нашей жизни, таких как образование, медицина, предпринимательская деятельность, экономика, государственное управление, научные исследования и другие. Современный человек каждый день повсеместно пользуется результатами их внедрения: мобильный телефон с интернетом в сетях 4G (5G), автомобильный

навигатор с искусственным интеллектом, информационные поисковые системы с использованием технологии BigData. С каждым годом области применения современных информационных технологий расширяются, распространяясь на всё новые области деятельности человека.

Медицинское образование – одна из тех сфер деятельности человека, где уже сегодня происходит активное применение информационных технологий. Внедрение в жизнь инноваций происходит в медицинской сфере повсеместно, в связи с этим широко распространенными и не требующими дополнительного объяснения стали такие термины как цифровая медицина, электронная медицинская карта, система поддержки принятия врачебных решений, телемедицина.

Тем не менее, несмотря на быстрые изменения, вызванные внедрением информационных технологий, традиционные методы обучения продолжают играть важную роль в современном образовании.

В тоже время стоит отметить, что использование только традиционных методик не может обеспечить необходимого качества подготовки обучающихся, сделать из них специалистов, обладающих компетенциями сегодняшнего дня. Информационные технологии глубоко укоренились в нашу повседневную жизнь. Сейчас и представить себе трудно, что может быть как-то по другому «как раньше». К хорошему быстро привыкают. И профессиональную подготовку в сфере медицинского образования новшества не обошли стороной.

С появлением современных информационных технологий появилось новое направление обучения – онлайн-образование. Причинами роста его популярности является широкая доступность и относительная дешевизна. Сегодня широко применяются современные электронные ресурсы с удобной визуализацией и навигацией, которые используются в сетевом обучении, как аудиторном, так и самостоятельном. Информационное образовательное пространство быстро изменяется на всех уровнях от начального до высшего и адаптируется к современным вызовам.

Система больших данных (BigData) находит своё качественное применение в медицинском образовании, а её дальнейшее активное развитие в данной области безусловно будет тесно связано с возможностью проведения всеобъемлющего анализа, основанного на накопленной ранее разнородной диагностической информации.

Чтобы подготовить специалистов, всё чаще используют расширение интерактивного образовательного пространства. Эта тенденция обусловлена применением современных образовательных технологий наряду с традиционными занятиями. К ним относятся подсистемы создания, ввода и хранения в базу данных информационных ресурсов, подсистемы управления процессом обучения, контроля знаний,

управления доступом к учебной и методической информации, справочная подсистема, телекоммуникационные и информационные технологии, электронные информационные и образовательные ресурсы [1].

В настоящее время дистанционные технологии и электронное обучение имеют огромный педагогический потенциал для всех уровней медицинского образования, включая этап первичной аккредитации специалистов. Этот потенциал заключается в симуляционном обучении, которое направлено на отработку практических навыков, алгоритмов и коммуникаций [2]. Это современная технология обучения и оценки компетенций, которая использует симуляцию клинических ситуаций для моделирования реалистичных учебных задач разной степени сложности.

Симуляционное обучение позволяет одновременно улучшать теоретические знания и развивать практические навыки (коммуникативные навыки, командную работу, этапы медицинской помощи). Информационные технологии внедряются в здравоохранение через телемедицину, которая включает дистанционную диагностику. В будущем планируется создание онлайн-курсов по образовательным технологиям и региональных центров компетенций в области онлайн-обучения [3].

Одним из ключевых направлений развития информационных технологий в медицинском образовании является совместный анализ биомедицинских данных. Анализ объединенных данных – это статистический метод, который объединяет и анализирует данные из нескольких источников для получения более полной картины исследуемой проблемы.

Цель совместного анализа биомедицинских данных – выявить общие тенденции, корреляции и закономерности, получить полное представление о здоровье испытуемого. Объединение данных помогает глубже понять процессы, происходящие в организме человека, делать обоснованные выводы на основе полученных результатов и разрабатывать наиболее эффективные методы профилактики, диагностики и лечения заболеваний.

В наше время широкое распространение получили системы сбора и мониторинга данных с биомедицинских датчиков, носимых человеком. Мобильное здравоохранение направлено на улучшение здоровья и благополучия людей путём постоянного мониторинга их физиологического состояния с помощью мобильных или носимых устройств и сенсоров. Революционным аспектом мобильного здравоохранения является его потенциал для поддержки развития точной медицины, позволяющей адаптировать медицинские решения и практики к индивидуальным потребностям пациента и смягчать последствия применения универсальных решений.

В качестве примера можно привести широко распространенный метод суточного (холтеровского) мониторингирования электрокарди-

ограммы человека. Сбор информации осуществляет портативное устройство, которое осуществляет регистрацию электрокардиограммы в течении заранее определенного периода времени (как правило, в течении 24 часов), что позволяет получить данные о работе сердца пациента в его повседневных условиях [4].

Не только состояние конкретных органов и отдельных систем организма человека, но и их функциональное взаимодействие определяет его здоровье. У людей не испытывающих проблем со здоровьем основные ритмы сердечно-сосудистой системы, включая основной сердечный ритм, низкочастотные колебания сердечных сокращений и артериальное давление, определяются высокой степенью синхронизации. Это позволяет здоровому организму эффективно приспосабливаться к различному роду воздействиям.

Возникновение патологий в сердечно-сосудистой системе обусловлено нарушением такой взаимосвязи, что может привести к возникновению серьезных заболеваний. Для их выявления на ранних стадиях и предупреждения возникновения побочных эффектов необходима своевременная профилактика. В связи с загруженностью медицинской системы и невозможностью частого посещения лечащего врача каждым пациентом, выходом видится проведение регулярных медицинских обследований самостоятельно пациентом в обычных условиях без необходимости посещения лечебного заведения.

Развитие цифровых технологий способствует использованию современных технических средств в медицине для сбора и накопления большого количества диагностических данных, которые можно применять для определения состояния здоровья и прогнозирования развития заболеваний [5].

В настоящее время существенно повысилась доступность специализированных медицинских приборов (стационарных и носимых устройств) для ежедневного самостоятельного мониторинга параметров функционирования сердечно-сосудистой системы: артериального давления, пульса, насыщения крови кислородом. Смартфон, с установленным на него специализированным программным обеспечением и подключенным к нему биомедицинскими датчиками, превращается в диагностический прибор, регистрирующий биологические сигналы, такие как фотоплетизмограмма и электрокардиограмма. В дальнейшем путем анализа пульсовой волны фотоплетизмограммы, синхронизированной с электрокардиограммой, определяет числовое значение давления [6]. Теперь даже человек с общими знаниями самостоятельно без чьей-либо помощи и (или) консультации способен контролировать состояние своего здоровья, проводить диагностику в любой момент времени без посещения лечебного заведения.

Анализ объединенных данных электрокардиограммы и физической активности может помочь определить, как физическая активность влияет на работу сердца. Это может быть полезно для разработки рекомендаций по физической активности для людей с различными заболеваниями сердца.

Таким образом, одним из путей для качественного улучшения жизни человека является необходимость последующего активного внедрения современных информационных технологий в образование и их применение в медицинской сфере. Основываясь на положительном опыте предыдущих исследований по совместному анализу биомедицинских данных, будущие изыскания позволят получить более полную и точную картину влияния различных факторов на здоровье человека.

Список литературы

1. Запесоцкая И. В., Кузнецова А. А., Моргун Л. А., Данилова А. В. Информационные и коммуникационные технологии в медицинском образовании // Медицинское образование и профессиональное развитие. 2019. Т. 10, № 4. С. 52–61. doi: 10.24411/2220-8453-2019-14003
2. Кузьмин А. В., Милюткин М. Г., Черепанов А. С. [и др.]. Алгоритмы определения видимости объектов сцены при симуляционном обучении базовым навыкам лапароскопии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2013. № 3. С. 40–51.
3. Колсанов А. В., Чаплыгин С. С., Иващенко А. В. [и др.]. Программное обеспечение тренажера лапароскопической хирургии // Программные продукты и системы. 2013. № 2. С. 267–270.
4. Safronov M., Kuzmin A., Bodin O. [et al.]. Mobile ECG Monitoring Device with Bioimpedance Measurement and Analysis // Conference of Open Innovations Association, FRUCT. 2019. № 24. P. 375–380. doi: 10.23919/FRUCT.2019.8711944.
5. Волчихин В. И., Митрохин М. А., Кузьмин А. В. [и др.]. Особенности обработки электрокардиосигналов в системах мобильного мониторинга // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. № 1 (45). С. 54–63.
6. Ivaschenko A., Kolsanov A., Nazaryan A., Kuzmin A. 3D surgery simulation software development kit // Proceedings of the European Simulation and Modeling Conference 2015 (ESM 2015). Leicester, UK, EUROSIS-ETI, 2015. P. 333–340.

ИГРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ: ВЛИЯНИЕ НА ВОСПИТАНИЕ МОЛОДЕЖИ

**Ирина Михайловна Мойко¹,
Наталья Валентиновна Мойко²,
Дмитрий Алексеевич Ушкин³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹irmojko@yandex.ru, ²nataliyavalentinovna@yandex.ru,

³diman222ushkin@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются роль игровых технологий в современном образовании и их влияние на воспитание учащихся. Обсуждаются основные аспекты, такие как мотивация и вовлеченность, развитие критического мышления, сотрудничество и командная работа, стимулирование творческого мышления, адаптивность и индивидуализация обучения. Подчеркивается, что игровые технологии способствуют не только эффективному усвоению знаний, но и развитию ключевых навыков и качеств, необходимых для успешной адаптации в современном мире.

Ключевые слова: интерактивность, мотивация, сотрудничество, проблемное мышление, эмоциональный интеллект, фидбек и оценка, креативность, саморегуляция

GAMING TECHNOLOGIES IN EDUCATION: IMPACT ON YOUTH EDUCATION.

Irina M. Moiko¹, Natalia V. Moiko², Dmitry A. Ushkin³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹irmojko@yandex.ru, ²nataliyavalentinovna@yandex.ru,

³diman222ushkin@gmail.com

Abstract. The role of gaming technologies in modern education and their impact on the education of students is considered. Key aspects discussed include motivation and engagement, developing critical thinking, collaboration and teamwork, stimulating creative thinking, adaptability and personalized learning. It is emphasized that gaming technologies contribute not only to the effective acquisition of knowledge, but also to the development of key skills and qualities necessary for successful adaptation in the modern world.

Keywords: interactivity, motivation, cooperation, problem thinking, emotional intelligence, feedback and assessment, creativity, self-regulation

Интерактивные методики обучения, основанные на использовании информационных технологий, играют значительную роль в современном образовании. Они позволяют создавать увлекательные и эффективные образовательные среды, способствующие не только обучению, но и воспитанию учащихся.

Игровые технологии имеют значительное влияние на воспитание по следующим причинам [1].

✓ **Мотивация и вовлеченность.** Игровые элементы, такие как задачи, достижения, уровни сложности и награды, могут стимулировать учащихся к активному участию в образовательном процессе. Это способствует повышению мотивации и вовлеченности, что в свою очередь положительно сказывается на их обучении и развитии. Мотивация и вовлеченность являются ключевыми аспектами успешного обучения, особенно в контексте онлайн-образования. Важно, чтобы учащиеся были внутренне мотивированы для обучения. Внутренняя мотивация может быть обусловлена интересом к предмету, стремлением к самосовершенствованию, достижением личных целей и эмоциональной удовлетворенностью от процесса. Внешняя мотивация, основанная на внешних факторах, таких как похвала, награда, оценка, страх может играть свою роль во вдохновении учащихся. Необходимо давать учащимся возможность выбора и контроля над своими образовательными решениями. Чувство автономии стимулирует внутреннюю мотивацию и учебную активность. Вовлеченность предполагает активное участие студентов в учебном процессе. Они задают вопросы, участвуют в обсуждениях, ищут дополнительные материалы, углубляются в тему. Важно, чтобы студенты испытывали эмоциональную связь с учебным материалом, преподавателем и образовательным процессом. Это способствует более глубокому усвоению информации и высокой мотивации для изучения.

✓ **Развитие критического мышления и принятия решений.** Игровые сценарии часто требуют от игроков анализа ситуаций, поиска решений и принятия стратегических решений. Это способствует развитию критического мышления, логического мышления и способности принимать обоснованные решения. Развитие критического мышления и способности принятия обоснованных решений – важные навыки, которые студенты могут развивать через игровые сценарии в онлайн-образовании. Итак, к положительным факторам, влияющим на воспитание студентов, можно отнести:

– **Стимулирование критического мышления.** Игровые сценарии в онлайн-образовании часто предполагают решение сложных задач, анализ ситуаций и поиск оптимальных решений. Этот процесс способствует развитию критического мышления у студентов, помогая им

видеть взаимосвязи, обосновывать свои решения и выявлять плюсы и минусы вариантов.

– Улучшение навыков логического мышления. Игровые сценарии требуют от студентов логического мышления, планирования шагов, предвидения последствий и применения логических принципов при принятии решений. Это способствует развитию умения анализировать информацию, выявлять закономерности и строить логически обоснованные аргументы.

– Обучение принятию стратегических решений. Игровые сценарии заставляют студентов думать стратегически, рассматривать долгосрочные цели, предвидеть возможные исходы и выбирать оптимальные стратегии действий. Этот опыт помогает студентам развивать умение принимать обдуманное и обоснованное решение.

– Стимулирование творческого мышления. Игровые сценарии в онлайн-обучении могут стимулировать творческое мышление студентов, поскольку они часто требуют нестандартного подхода к решению задач, экспериментирования и нахождения новых способов достижения целей. Некоторые игровые технологии позволяют пользователям создавать свои собственные уровни, задания или элементы игры. Это способствует развитию творческого мышления, фантазии и умения применять полученные знания на практике. Возможность создания собственных уровней и заданий в игровых технологиях позволяет студентам выразить свою творческую мысль и фантазию. Они могут самостоятельно разрабатывать уникальные игровые механики, сценарии и элементы, что способствует развитию их творческого потенциала.

✓ Повышает уверенность в принятии решений. Успешное преодоление проблем игровых сценариев и решение сложных задач укрепляют у студентов уверенность в собственных способностях, помогая им лучше осознавать свои сильные стороны и развивать навыки решения проблем.

✓ Сотрудничество и командная работа. Многие игровые приложения предлагают возможность сотрудничества и работы в команде для достижения общей цели. Это помогает развивать навыки коммуникации, сотрудничества, лидерства и уважения к мнению других. Участие в совместных игровых проектах требует от игроков умения эффективно общаться и передавать информацию друг другу. Это способствует развитию устной и письменной коммуникации, а также умению поддерживать диалог.

✓ Способствует сотрудничеству и партнерству. Во время совместной игры молодежь учится работать в команде, делиться задачами, поддерживать друг друга и объединять усилия для достижения общей

цели. Это способствует развитию навыков сотрудничества и партнерства.

✓ Формирование лидерских качеств. Некоторые игровые приложения требуют от участников принятия роли лидера в команде. Это способствует развитию лидерских качеств, умению принимать решения, координировать действия и мотивировать других.

✓ Поддерживает уважение к мнению других. В процессе совместной игры молодежь учится уважать мнения и идеи других участников команды. Это способствует развитию навыков слушания, понимания и уважительного отношения к точке зрения партнеров.

✓ Учит решать проблемы в коллективе. Возникающие в игре трудности и задачи стимулируют молодежь к поиску совместных решений и развитию навыков проблемного мышления в группе.

Вот несколько примеров игр, которые иллюстрируют различные аспекты влияния игровых технологий на воспитание молодежи:

Minecraft. Стимулирует креативное мышление, так как игроки могут строить свои миры и экспериментировать с различными дизайнами.

Fortnite. В Fortnite игроки могут взаимодействовать с другими игроками, формируя команды и совместно решая задачи, что способствует развитию социальных навыков.

Civilization VI. Требуя от игроков планирования, анализа ситуации и управления ресурсами, что помогает развивать навыки управления временем и приоритетами.

Life is Strange. Игра предлагает игрокам принимать решения, которые влияют на ход сюжета и развитие персонажей, что способствует развитию личностных качеств, таких как самоанализ и принятие ответственности.

Kerbal Space Program. Эта игра об управлении космической программой стимулирует интерес к науке и инженерии, предоставляя при этом образовательные возможности.

Эти игры представляют разнообразные жанры и подходы к развитию различных аспектов личности у молодежи.

Несмотря на множество положительных аспектов, есть и отрицательные моменты [2]. Это зависимость (возникает риск развития зависимости от игровых технологий, что может негативно сказаться на академической успеваемости и социальной адаптации) и отсутствие реальных навыков (некоторые критики считают, что игровые технологии не всегда развивают навыки, необходимые для успешной жизни в реальном мире).

Таким образом, игровые технологии в интерактивных методиках обучения не только способствуют эффективному усвоению знаний, но

и оказывают положительное влияние на воспитание, развивая ключевые навыки и качества, необходимые для успешной адаптации в современном мире. В целом, использование игровых технологий для стимулирования творческого мышления помогает воспитывать студентов, развивая их творческий потенциал, логическое мышление, самостоятельность и коммуникативные навыки. Использование игровых платформ с адаптивным и индивидуализированным подходом в образовании помогает не только повысить интерес студентов к обучению, но также способствует развитию их критического мышления, мотивации и коммуникативных навыков.

Список литературы

1. Научные навыки мышления в виртуальных мирах // Журнал науки об образовании и технологиях. 2008. № 17 (6). С. 530–543.
2. Эгенфельдт-Нильсен С., Смит Дж., Тоска С. П. Понимание видеоигр: введение в суть. СПб. : Питер, 2018.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЯ
В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ: ПРЕИМУЩЕСТВА
И НЕДОСТАТКИ ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЯ,
ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ВОСПИТАНИЕ МОЛОДЕЖИ**

**Наталья Валентиновна Мойко¹,
Ирина Михайловна Мойко²,
Дмитрий Алексеевич Ушкин³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹nataliyavalentinovna@yandex.ru, ²irmojko@yandex.ru,

³diman222ushkin@gmail.com

Аннотация. Анализируются актуальные вопросы использования онлайн-образования в современном образовательном процессе. Рассматриваются преимущества и недостатки онлайн-формата обучения, его влияние на воспитание молодежи и развитие образовательных технологий. Результаты исследования могут быть полезны для педагогов, родителей, студентов и всех заинтересованных лиц, стремящихся понять роль онлайн-образования в современном мире.

Ключевые слова: онлайн-образование, преимущества, недостатки, влияние, молодежь, воспитание

**THE USE OF ONLINE EDUCATION IN THE MODERN WORLD:
THE ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF ONLINE EDUCATION,
ITS IMPACT ON THE EDUCATION OF YOUTH**

Natalia V. Moiko¹, Irina M. Moiko², Dmitry A. Ushkin³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹nataliyavalentinovna@yandex.ru, ²irmojko@yandex.ru,

³diman222ushkin@gmail.com

Abstract. Current issues of using online education in the modern educational process are analyzed. The advantages and disadvantages of the online learning format are examined, its impact on the education of youth is revealed, and the development of educational technologies is discussed. The conclusions may be useful for teachers, parents, students and all interested parties seeking to understand the role of online education in the modern world.

Keywords: online education, advantages, disadvantages, influence, youth, education

Введение. Онлайн-образование (или дистанционное обучение) – это форма образования, которая происходит через интернет, позволяя учащимся получать знания и навыки без необходимости физически присутствовать в учебном заведении. Онлайн-образование может предоставляться в различных форматах, включая вебинары, видеоуроки, онлайн-курсы, электронные учебники и др.

Роль онлайн-образования в современном образовательном процессе значительна. Вот лишь некоторые из ключевых аспектов: доступность, гибкость, расширенные возможности, экономичность, личное развитие, разнообразие образовательных ресурсов, индивидуализация обучения, международное обучение, эффективный мониторинг прогресса и, наконец, сокращение затрат [1–3].

Влияние на воспитании молодежи

Онлайн-образование оказывает значительное влияние на воспитание молодежи, включая развитие цифровой грамотности и навыков самостоятельной работы.

Участие в онлайн-курсах и обучение через интернет помогают молодежи развивать навыки работы с компьютером и цифровыми технологиями. Они учатся эффективно использовать онлайн-ресурсы, осваивать программы для обучения, коммуникации и работы с информацией.

Кроме того, онлайн-образование требует от студентов самостоятельности и организации. Молодые люди учатся планировать свое время, устанавливать приоритеты, следовать учебному графику и выполнять задания независимо от присутствия преподавателя.

Учеба в онлайн-формате способствует развитию самодисциплины у студентов. Они вынуждены соблюдать собственный график учебы, сдавать задания вовремя и самостоятельно контролировать свой прогресс.

Онлайн-образование способствует развитию навыков исследования: поиск информации в сети, анализ ресурсов и проведение исследований в онлайн-режиме помогает научиться критически мыслить, оценивать информацию и принимать обоснованные решения.

Благодаря возможности обучаться через интернет у молодежи открывается доступ к знаниям и опыту из различных стран и культур, что способствует их культурному обогащению и развитию межкультурного понимания. Онлайн-образование создает платформу для молодежи из разных стран взаимодействовать и общаться друг с другом. Это способствует культурному обогащению, пониманию различий и сходств между культурами, расширяет кругозор и поддерживает толерантное отношение к разнообразию. Онлайн-образование может

стимулировать сотрудничество студентов из разных стран в рамках общих проектов и заданий. Это способствует развитию коммуникативных и межличностных навыков, умению работать в команде и достижению совместных целей.

Онлайн-образование, хотя и предоставляет множество преимуществ, также вносит ряд недостатков в области социализации и развития межличностных навыков у молодежи.

✓ Отсутствие физического взаимодействия. Онлайн-формат не предоставляет студентам возможности для прямого общения лицом к лицу с преподавателями и однокурсниками. Это может затруднить развитие навыков непосредственного взаимодействия, включая умение слушать, выражать свои мысли и чувства, чувство эмпатии и умение решать конфликты.

✓ Нехватка возможностей для культурного обмена. Хотя онлайн-образование предоставляет возможность общения с молодежью из разных стран, оно все же не заменяет полноценного культурного и интегративного опыта, который могут получить студенты при физическом присутствии в учебном заведении.

✓ Снижение мотивации и вовлеченности. Для некоторых студентов отсутствие физического присутствия и общения может привести к снижению мотивации для учебы, а также создать чувство изоляции и одиночества, что может отрицательно отразиться на их обучении.

✓ Ограниченные возможности для развития межличностных навыков. Межличностные навыки, такие как коммуникация, кооперация, решение конфликтов, могут развиваться лучше в обстановке физического общения. Онлайн-формат может ограничивать возможности для практики этих навыков.

✓ Необходимость активного участия. В онлайн-образовании студентам часто требуется более активное участие в обучении, самостоятельная инициатива и ответственность за свое учебное достижение. Недостаток личного взаимодействия может стать барьером для развития этих ответственностей.

Несмотря на проблемы, связанные с социализацией и развитием межличностных навыков, современные онлайн-платформы и методики начинают интегрировать элементы, способствующие улучшению социализации и развитию межличностных навыков студентов, делая образование на расстоянии более полноценным и эффективным.

Заключение. В целом онлайн-образование играет важную роль в формировании у молодежи цифровых навыков [4], самостоятельности и ответственности, что важно для их успешной адаптации к современному информационному обществу. Онлайн-образование помогает формировать у молодежи не только знания и навыки, но и ответст-

венность за свое обучение, что является важным аспектом для их личностного и профессионального развития. Общение с молодежью из различных стран через онлайн-платформы способствует улучшению языковых навыков. Это помогает молодежи увереннее выражать свои мысли на иностранном языке и легче понимать иностранные собеседников. Онлайн-образование открывает перед молодежью уникальные возможности для общения, обмена опытом и сотрудничества с молодыми людьми из разных стран, способствуя их развитию, расширению кругозора и культурному обогащению.

Список литературы

1. Кузнецова Е. А. Онлайн-образование: преимущества и недостатки. М. : Книга по Требованию, 2018.
2. Иванова Н. П. Влияние онлайн-образования на развитие образовательных технологий. СПб. : Питер, 2019.
3. Смирнов А. Б. Эффективность использования онлайн-образования в современном образовательном процессе. М. : Изд-во МГУ, 2020.
4. Петрова О. С. Онлайн-образование и его влияние на воспитание молодежи. М. : Наука, 2017.

СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ И УДОБСТВА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОПУЛЯРНЫХ ПОИСКОВЫХ СИСТЕМ

Александр Михайлович Отставнов¹,
Дарья Дмитриевна Григорьева²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹alexotst58@yandex.ru, ²g.darya.work@gmail.com

Аннотация. Проведено сравнительное исследование популярных поисковых систем, таких как Yandex, Google, Bing, DuckDuckGo, с точки зрения их функциональности и удобства использования. Результаты исследования помогут пользователям лучше понять особенности и преимущества каждой из рассматриваемых систем, а также определить критерии выбора наиболее подходящего поисковика.

Ключевые слова: поисковая система, Yandex, Google, Bing, DuckDuckGo

COMPARISON OF FUNCTIONALITY AND USER CONVENIENCE OF POPULAR SEARCH ENGINES

Alexander M. Otstavnov¹, Daria D. Grigorieva²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹alexotst58@yandex.ru, ²g.darya.work@gmail.com

Abstract. A comparative study of popular search engines such as Yandex, Google, Bing, DuckDuckGo has been conducted in terms of their functionality and usability. The results of the study will help users better understand the features and advantages of each of the systems under consideration, as well as determine the criteria for choosing the most suitable search engine.

Keywords: search engine, Yandex, Google, Bing, DuckDuckGo

В эпоху информационных технологий поисковые системы стали неотъемлемым элементом повседневной жизни. Они облегчают нахождение информации, упрощают навигацию по сети Интернет и в значительной степени определяют уровень удобства и эффективности работы пользователя. Однако, несмотря на их широкое распространение, мало исследований было проведено для объективного сравнения функциональности и удобства использования этих инструментов.

В данной статье представлено исследование популярных поисковых систем, таких как Google, Bing, DuckDuckGo, Yandex, с целью

провести сравнительный анализ их функциональности и удобства использования. В качестве критериев сравнения выступили алгоритмы ранжирования, скорость обработки запросов, удобство интерфейса, а также применимость результатов в различных сферах деятельности. Это исследование поможет пользователям и разработчикам лучше понять особенности и преимущества каждой из рассматриваемых систем, а также определить критерии для выбора наиболее подходящего поисковика.

Google (рис. 1) – это один из самых популярных и широко используемых поисковиков в мире. Его основная функция - помочь пользователям находить информацию в интернете, обрабатывая миллионы запросов каждый день.

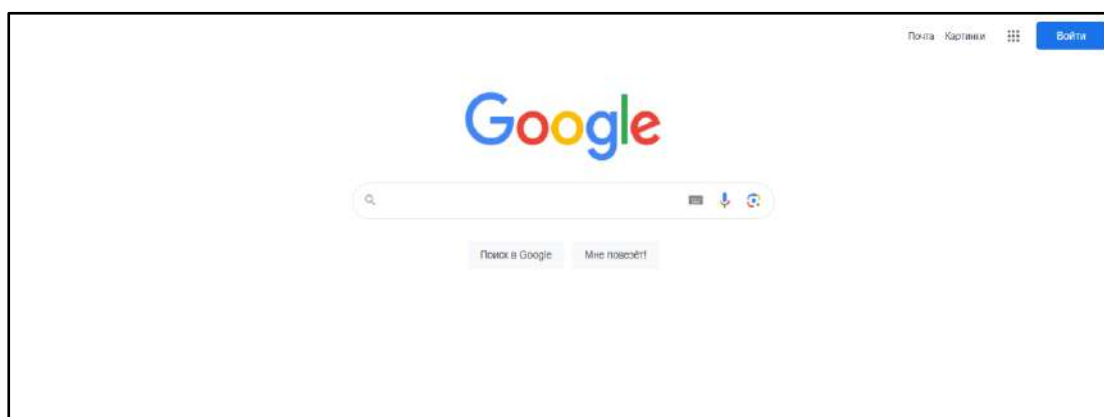


Рис. 1. Интерфейс поисковой системы Google

Основой работы Google является сложный алгоритм, который использует множество факторов для определения релевантности веб-страниц к поисковому запросу. Этот процесс включает в себя индексацию веб-страниц, анализ их содержимого и структуры, а также учет поведения пользователей при поиске информации. Google также предлагает ряд дополнительных функций и инструментов, которые делают поиск более удобным и эффективным. Например, пользователи могут ограничить поиск определенным сайтом, что позволяет получить более точные результаты, если вы знаете, где искать информацию. Одним из ключевых преимуществ Google является его простота и удобство использования. Интерфейс поисковика интуитивно понятен, а продвинутые функции, такие как фильтры поиска и специальные запросы, легко доступны для пользователей.

Bing (рис. 2) – это поисковая система, разработанная компанией Microsoft. Основная функция Bing – предоставление пользователям информации, которую они ищут в интернете. Для этого Bing использует сложные алгоритмы, которые анализируют и ранжируют веб-страницы

на основе их релевантности поисковому запросу. Bing также предлагает ряд дополнительных функций и инструментов. Например, Bing предлагает интеграцию с другими продуктами Microsoft, такими как Internet Explorer и Microsoft Office. Важно отметить, что Bing постоянно развивается и улучшается. Например, в 2023 году Bing интегрировал технологию искусственного интеллекта ChatGPT, что позволило улучшить качество и точность результатов поиска.

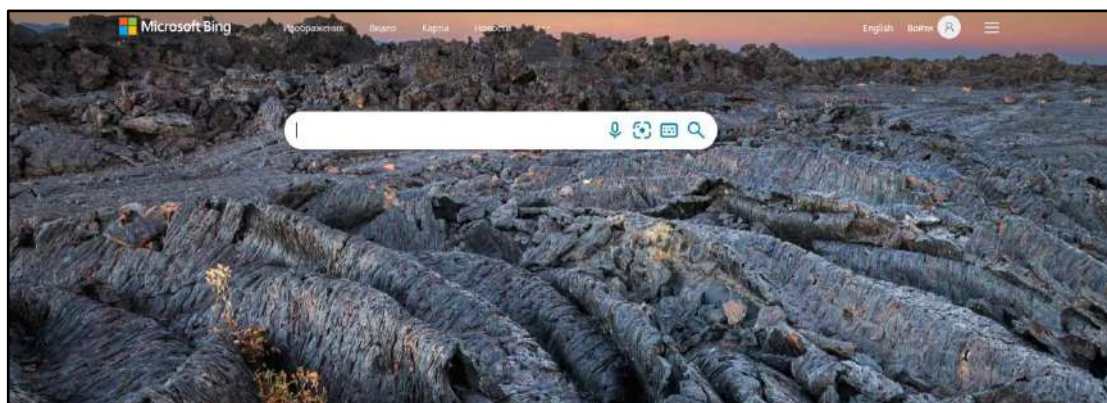


Рис. 2. Интерфейс поисковой системы Bing

В целом Bing предлагает уникальный подход к поиску информации в интернете, предоставляя пользователям альтернативу к более традиционным поисковым системам.

DuckDuckGo (рис. 3) – это американская компания, предлагающая ряд продуктов, направленных на защиту конфиденциальности пользователей в интернете. Основной продукт – это поисковая система, которая получила признание защитников конфиденциальности. Основное отличие DuckDuckGo от других поисковых систем, таких как Google, заключается в том, что он не отслеживает пользователей и не сохраняет их личную информацию. Это делает DuckDuckGo привлекательным для тех, кто ценит свою конфиденциальность в интернете. DuckDuckGo также предлагает функцию Instant Answers, которая предоставляет непосредственные ответы на запросы пользователей, а также поддерживает более 1200 источников для получения этих ответов.

Одной из уникальных особенностей DuckDuckGo являются так называемые "bangs". Это короткие команды, которые позволяют пользователям быстро перейти к поиску на конкретных сайтах. Например, "!ebay shoes" мгновенно перенаправит пользователя на поиск обуви на сайте eBay. DuckDuckGo также предлагает интеграцию с другими браузерами и операционными системами. Например, он был включен в список стандартных поисковых систем в браузерах Apple, Firefox и Chrome.

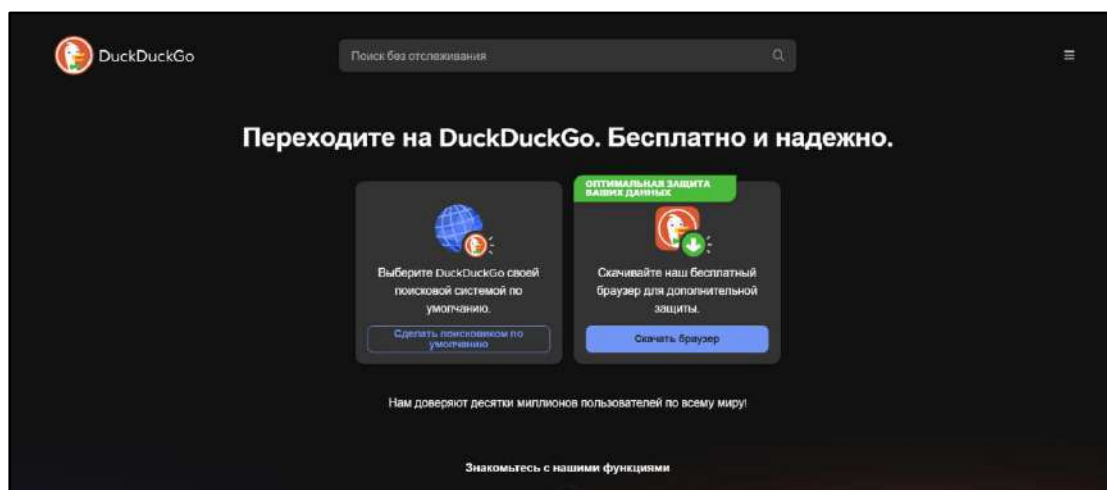


Рис. 3. Интерфейс поисковой системы DuckDuckGo

Yandex (рис. 4) – это один из крупнейших поисковых сервисов в мире, особенно популярный в России. Поисковик Yandex привлекает пользователей своим уникальным подходом к индексированию страниц и алгоритмам поиска. Он умеет учитывать множество факторов, чтобы предоставить наиболее релевантную информацию для каждого запроса. Это делает его одним из самых точных и эффективных поисковых сервисов. Yandex также известен своими инновациями в области искусственного интеллекта и машинного обучения. Их технологии позволяют улучшить качество поиска, а также предоставляют новые возможности для пользователей, такие как персонализированные рекомендации и голосовой поиск.

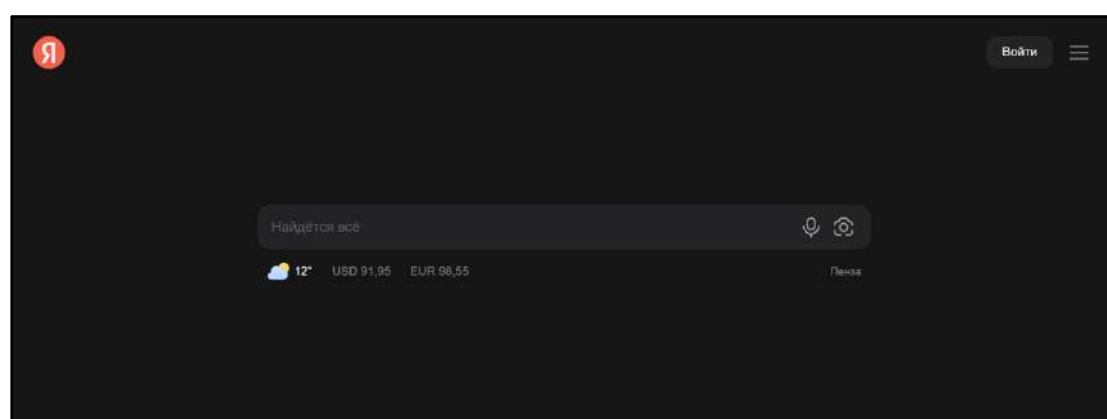


Рис. 4. Интерфейс поисковой системы Yandex

Сравнение работы вышеописанных поисковых сервисов проводилось по следующим критериям:

- **Скорость.** Для проверки скорости были сформированы URL запросы, например «[https://www.google.com/search?q=купить+детский+ зонтик](https://www.google.com/search?q=купить+детский+зонтик)» и отправлены через сервис проверки скорости загрузки страницы.

- Точность выданных результатов. Вручную были проверены первые 20 результатов на предмет соответствия выданных результатов введённому запросу.

- Коэффициент полноты поиска. Вручную были проверены первые 20 результатов, коэффициент был высчитан по формуле $ИПС = 100 * (R / C)$, где R – число релевантных ответов, C – общее число ответов.

Результаты сравнения представлены в табл. 1. В качестве запросов для сравнения были выбраны:

- стандартный запрос;
- запрос с добавлением операторов поиска, например «|», «*», «()»;
- запрос с опечатками;
- запрос, введённый на неправильной раскладке.

Таблица 1

	Google	Bing	DuckDuckGo	Yandex
Стандартный запрос «купить детский зонтик»				
Скорость	345 мс	313 мс	239 мс	308 мс
Точность выданных результатов	Все результаты соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу
Коэффициент полноты поиска, %	100	100	100	100
Запрос с добавлением операторов поиска «купить «детский зонтик»»				
Точность выданных результатов	Все результаты соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу
Коэффициент полноты поиска, %	100	100	100	100
Запрос с опечатками «упитмь деткий зонтрк»				
Точность выданных результатов	Все результаты соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу	6 из 20 результатов не соответствуют запросу	4 из 20 результатов не соответствуют запросу
Коэффициент полноты поиска, %	100	100	70	80
Запрос, введённый на неправильной раскладке «regbnm ltncrbq pjynbr»				
Точность выданных результатов	Все результаты соответствуют запросу	11 из 20 результатов не соответствуют запросу	20 из 20 результатов не соответствуют запросу	Все результаты соответствуют запросу
Коэффициент полноты поиска, %	100	45	0	100

На рис. 5–8 представлены подсказки, которые появляются после введения запроса «купить детский зонт». DuckDuckGo не отображает подсказок, подсказки Bing не облегчают поиск и в некоторых случаях не имеют смысла. Лучше всего справились Google и Yandex. Количество подсказок у Google больше, однако на Yandex подсказки универсальны и не имеют привязки к геолокации.

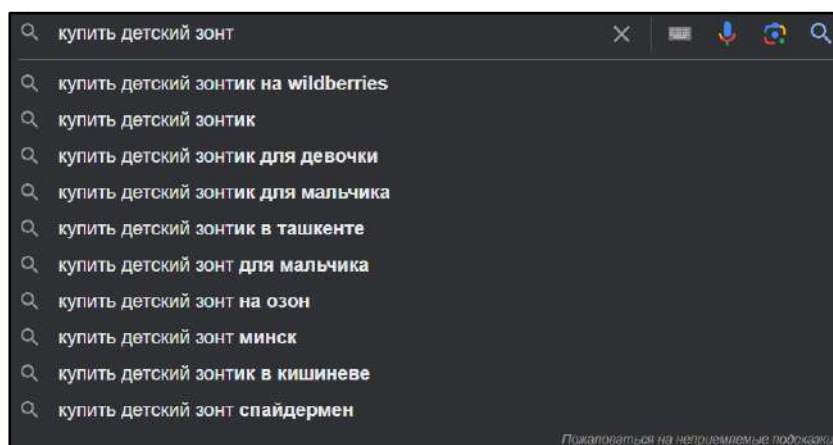


Рис. 5. Подсказки при вводе запроса на Google



Рис. 6. Подсказки при вводе запроса на Bing



Рис. 7. Подсказки при вводе запроса на DuckDuckGo

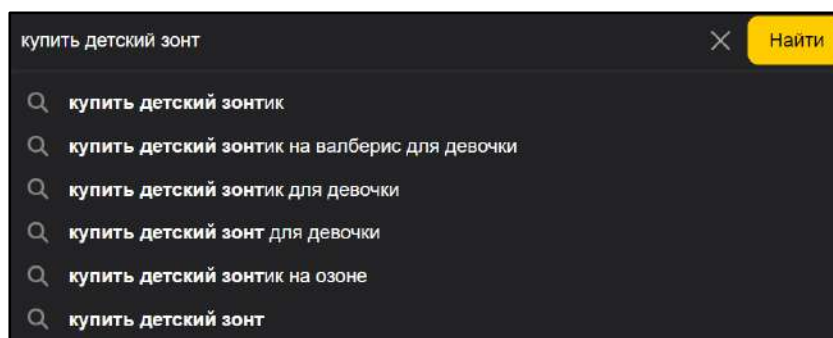


Рис. 8. Подсказки при вводе запроса на Yandex

Вывод. Поисковые системы Yandex и Google являются лидерами в области рекомендации поисковых подсказок. Однако, Yandex обнаруживает некоторые слабости при работе с запросами, содержащими опечатки, где его коэффициент полноты поиска снижается. Bing показывает хорошие результаты в плане полноты поиска, но его подход к формированию поисковых подсказок, основанный на использовании нейронных сетей, на данный момент не может конкурировать с классическими алгоритмами, используемыми Yandex и Google. DuckDuckGo имеет определенные ограничения, такие как отсутствие рекомендации подсказок и низкий коэффициент полноты поиска без точного формулирования запроса. В случае с неправильной раскладкой клавиатуры, релевантные результаты отсутствуют вовсе. Таким образом, каждая из рассмотренных поисковых систем имеет свои сильные и слабые стороны, и выбор между ними в значительной степени зависит от конкретных потребностей и предпочтений пользователя [1–7].

Список литературы

1. Пестерев П. В. Анализ нововведений в алгоритмах поисковых систем Yandex и Google. 2017. URL: <http://dspace.bstu.ru/bitstream/123456789/1666/1/24.%20%D0%9F%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B2.pdf> (дата обращения: 10.03.2024).
2. Usmani T. A., Pant D., Bhatt A. K. A Comparative Study of Google and Bing Search Engines in Context of Precision and Relative Recall Parameter // International Journal on Computer Science and Engineering. 2012. Vol. 4, № 1. P. 21.
3. Dr. Vaishali S Parsania, Kalyani F., Kamani K. A Comparative Analysis: DuckDuckGo Vs. Google Search Engine. 2016. URL: https://www.researchgate.net/publication/312626988_A_Comparative_Analysis_DuckDuckGo_Vs_Google_Search_Engine (дата обращения: 10.03.2024).
4. Поисковая система Yandex. URL: <https://ya.ru> (дата обращения: 10.03.2024).
5. Поисковая система Google. URL: <https://www.google.ru> (дата обращения: 10.03.2024).
6. Поисковая система Bing. URL: <https://www.bing.com> (дата обращения: 10.03.2024).
7. Поисковая система DuckDuckGo. URL: <https://duckduckgo.com> (дата обращения: 10.03.2024).

НЕСТАНДАРТНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Александр Олегович Майоров

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

maiorov-aleksand@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются некоторые нестандартные позиционные системы счисления и в том числе системы счисления с отрицательным, комплексным основанием.

Ключевые слова: системы счисления, отрицательные основания систем счисления, комплексные основания систем счисления

UNORTHODOX NUMERICAL SYSTEMS

Alexander O. Mayorov

Penza State University, Penza, Russia

maiorov-aleksand@mail.ru

Abstract. The article discusses some unorthodox numerical systems. In particular, numerical systems with negative base and complex base are discussed.

Keywords: numerical systems, negative numerical system base, complex numerical system base

Система счисления – символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков. Различные системы счисления использовались людьми на протяжении истории. В обыденной практике используется десятичная система исчисления. Кроме того, многие знакомы с двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системами счисления по работе с персональными компьютерами. Однако, существуют менее известные системы счисления, которые имеют различные применения в математике и информатике. Так, система счисления с основанием (-2) применяется в теории кодирования, а система счисления с основанием $(-1 + i)$ в теории фракталов. Об этих системах счисления пойдет речь в данной статье.

Основание (-2)

Используя основание системы счисления равное (-2) положительные, и отрицательные числа могут быть представлены без явного указания знака числа, а также без заимствования какой-либо цифры числа для обозначения знака (как, например, старший бит в некоторых представлениях чисел в двоичной системе счисления в памяти компьютера) [1].

$$(a_n \dots a_3 a_2 a_1 a_0) = a_n(-2)^n + \dots + a_3(-2)^3 + a_2(-2)^2 + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0 \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что процедура нахождения числа в основании счисления (-2) заключается в последовательном делении числа на (-2) с записью остатков. Деление должно быть определено следующим образом: остаток должен быть всегда равен 0 или 1. Другими словами деление должно осуществляться по модулю.

$$\frac{-3}{-2} = 2 \text{ (ост. 1)} \quad (2)$$

$$\frac{2}{-2} = -1 \text{ (ост. 0)} \quad (3)$$

$$\frac{-1}{-2} = 1 \text{ (ост. 1)} \quad (4)$$

$$\frac{1}{-2} = 0 \text{ (ост. 1)}. \quad (5)$$

Следовательно, когда мы достигли частного равного 0, процедура завершается (если продолжить процедуру, все последующие частные и остатки должны быть равны нулю). Записав получившиеся остатки, можно убедиться, что (-3) можно представить в виде 1101 в основании (-2) .

$$-3_{10} = 1101_{-2}. \quad (6)$$

В табл. 1 приведена таблица перевода из 10-й системы счисления в (-2) -ю систему счисления.

В табл. 2 приведена таблица перевода из 10-й системы счисления в (-2) -ю систему счисления (с лексикографической сортировкой чисел по основанию (-2)).

Таблица 1

Перевод из 10-й СС в (–2)-ю СС

n основание 10	n основание (–2)	$(-n)$ основание (–2)
0	0	0
1	1	11
2	110	10
3	111	1101
4	100	1100
5	101	1111
6	11010	1110
7	11011	1001
8	11000	1000
9	11001	1011
10	11101	1010
11	11111	110101
12	11100	110100
13	11101	110111
14	10010	110110
15	10011	110001

Таблица 2

Перевод из 10-й СС в (–2)-ю СС (отсортирована лексикографически по основанию (–2))

n основание 10	n основание (–2)
0	0
1	1
–2	10
–1	11
4	100
5	101
2	110
3	111
–8	1000
–7	1001
–10	1010
–9	1011
–4	1100
–3	1101
–6	1110
–5	1111

Теорема: 2^n возможных – битовых чисел однозначно представляют все целые числа в определенном интервале.

Рассмотрим доказательство данного утверждения по индукции.

База:

Для $n = 2$, представимые целые:

$$10_{-2} = -2_{10}, 11_{-2} = -1_{10}, 00_{-2} = 0_{10}, 01_{-2} = 1_{10}.$$

Предположение:

Если n – четно, то n -битовые числа представляют все целые числа в интервале $\left[-\frac{2^{n+1}-2}{3}, \frac{2^n-1}{3}\right]$.

Если n – нечетно, то n -битовые числа представляют все целые числа в интервале $\left[-\frac{2^n-2}{3}, \frac{2^{n+1}-1}{3}\right]$.

Переход:

Допустим n – четное.

С нулем в крайнем левом разряде $n + 1$ бит представляют целые числа в интервале $\left[-\frac{2^{n+1}-2}{3}, \frac{2^n-2}{3}\right]$ до, что и так соотносится с предположением.

С единицей в крайнем левом разряде $n + 1$ бит представляют целые числа в интервале $\left[2^n - \frac{2^{n+1}-2}{3}, 2^n + \frac{2^n-1}{3}\right]$.

$$2^n - \frac{2^{n+1}-2}{3} = \frac{2^n-1}{3} + 1 \quad (7)$$

$$2^n + \frac{2^n-1}{3} = \frac{2^{n+2}-1}{3} \quad (8)$$

Следовательно, с единицей в крайнем левом разряде $n + 1$ бит представляют целые числа в интервале $\left[\frac{2^n-1}{3} + 1, \frac{2^{n+2}-1}{3}\right]$. Данный интервал смежен с интервалом $\left[-\frac{2^{n+1}-2}{3}, \frac{2^n-1}{3}\right]$ (из предположения). Можно увидеть, что с единицей в крайнем левом разряде $n + 1$ бит представляют целые в интервале $\left[-\frac{2^{n+1}-2}{3}, \frac{2^{n+2}-1}{3}\right]$. $\left[-\frac{2^{n+1}-2}{3}, \frac{2^{n+2}-1}{3}\right]$ – предположение для нечетных n (с n замененным на $n + 1$).

Аналогично для нечетных n .

Основание $(-1 + i)$

Используя систему счисления с основанием равным $(-1 + i)$, где $i = \sqrt{-1}$, каждое комплексное целое число (комплексное число с целой мнимой и действительной частью) может быть представлено как единое число, то есть без каких-либо знаков в своей записи [2].

Процедура перевода числа в систему счисления с основанием $(-1 + i)$ аналогична процедурам для перевода в другие системы счисления. Чтобы перевести число 2_{10} будем последовательно делить его и результаты деления на $(-1 + i)$ пока частное не окажется равным нулю. Записав остатки в обратном порядке, получим число в системе счисления с основанием $(-1 + i)$ [3].

$$\frac{2}{-1 + i} = \frac{2(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = -1 - i \text{ (ост. 0)} \quad (9)$$

$$\frac{-1 - i}{-1 + i} = \frac{(-1 - i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = i \text{ (ост. 0)} \quad (10)$$

$$\frac{i - 1}{-1 + i} = 1 \text{ (ост. 1)} \quad (11)$$

$$\frac{1 - 1}{-1 - i} = 0 \text{ (ост. 1)}. \quad (12)$$

Достигнув нуля, алгоритм завершается. Запишем остатки в обратном порядке и получим

$$2_{10} = 1100_{-1+i}. \quad (13)$$

В табл. 3 приведена таблица перевода из 10-й системы счисления в $(-1 + i)$ -ю систему счисления.

Таблица 3

Перевод из 10-чной СС в $(-1 + i)$ -чную СС

n основание 10	n основание $(-1 + i)$	$(-n)$ основание $(-1 + i)$
0	0	0
1	1	11101
2	1100	11100
3	1101	10001
4	111010000	10000
5	111010001	11001101
6	111011100	11001100
7	111011101	11000001
8	111000000	11000000
9	111000001	11011101
10	111001100	11011100
11	111001101	11010001
12	100010000	11010000
13	100010001	1110100001101
14	100011100	1110100001100
15	100011101	1110100000001

В таблице 4 приведена таблица перевода из 10-й системы счисления в $(-1 + i)$ -ю систему счисления (с лексикографической сортировкой чисел по основанию $(-1 + i)$).

Таблица 4

Перевода из 10-й СС в $(-1 + i)$ -ю СС (отсортирована лексикографически по основанию $(-1 + i)$)

n основание 10	n основание $(-1 + i)$
0	0
1	1
$-1 + i$	10
i	11
$-2i$	100
$1 - 2i$	101
$-1 - i$	110
$-i$	111
$2 + 2i$	1000
$3 + 2i$	1001
$1 + 3i$	1010
$2 + 3i$	1011
2	1100
3	1101
$1 + i$	1110
$2 + i$	1111

Учитывая вышеизложенное, приведенные системы счисления обладают уникальными свойствами (возможность представления целых чисел без обозначения знака в своей записи), что делает их интересными объектами для дальнейшего математического изучения. Данные системы счисления успешно применяются при решении задач в различных областях математики и информатики.

Список литературы

1. Henry S. Warren, Jr. Hacker's Delight // Addison-Wesley. 2012.
2. Donald E. Knuth. An Imaginary Number System // Communications of the ACM. 1960. Vol. 3, iss. 4.
3. Donald E. Knuth. The Art of Computer Programming. Positional Number Systems // Addison-Wesley. 1998. Vol. 2.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ РИСКОВ СВОБОДНОГО
ОБРАЩЕНИЯ УСТРОЙСТВА FLIPPER ZERO:
АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ УГРОЗ ДЛЯ ОБЩЕСТВЕННОГО ПОРЯДКА**

**Ян Павлович Подольский¹,
Александр Сергеевич Родченко²,
Наталья Васильевна Зверовщикова³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹yan.06090@mail.ru, ²rodchenko-aleksandr01@mail.ru,

³nvz.matematika@yandex.ru

Аннотация. Исследован уровень опасности устройства Flipper Zero, представляющего собой многофункциональный прибор для работы с различными электронными системами. В ходе исследования был проведен анализ потенциальных угроз, которые могут возникнуть из-за использования данного устройства.

Ключевые слова: Flipper Zero, RFID, NFC, инфракрасный передатчик

**INVESTIGATION OF THE POTENTIAL RISKS OF FREE
CIRCULATION OF THE FLIPPER ZERO DEVICE:
ANALYSIS OF POSSIBLE THREATS TO PUBLIC ORDER**

**Yan P. Podolsky¹, Alexander S. Rodchenko²,
Natalia V. Zverovshchikova³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹yan.06090@mail.ru, ²rodchenko-aleksandr01@mail.ru,

³nvz.matematika@yandex.ru

Abstract. In this scientific article, a study of the danger level of the Flipper Zero device, which is a multifunctional device for working with various electronic systems, has been conducted. During the study, an analysis of potential threats that may arise from the use of this device was carried out.

Keywords: Flipper Zero, RFID, NFC, Infrared Transmitter

История создания электронного устройства Flipper Zero началась, когда у группы энтузиастов из России, работающих в сфере систем контроля и учёта доступа, возникли проблемы из-за отсутствия инструментов анализа и отладки внутренних компонентов устройств. Тогда

появилась идея создания прибора, объединяющего в себе все необходимые функции в одном компактном и удобном корпусе с понятным для обычного пользователя интерфейсом.

30 июня 2020 года образованная ими организация Flipper Devices Inc. представила на платформе Kickstarter устройство Flipper Zero. Целевой суммой финансирования было 60 тысяч долларов. В первые сутки был собран 1 миллион долларов, что свидетельствует о высоком интересе общественности к данному продукту.

Такой спрос обусловлен тем, что Flipper Zero является универсальным, многофункциональным устройством, которое обладает широкой областью применения в информационной безопасности (тестирование уязвимостей), разработке электронных систем (использование в качестве отладочной платформы), образовании и исследовании (проведение экспериментов и исследований в области беспроводных технологий, электроники).

Само устройство представляет собой маленькую коробку из АБС-пластика размерами 100 × 40 × 25 мм и весом 102 г.

В качестве микроконтроллера используется распространённая плата STM32WB55RG. На данную плату установлен 32 битный ARM-процессор “Cortex-M4”, работающий на частоте 64 МГц.

Для отладки может потребоваться прямое подключение к выходам на плате. Для такого случая можно использовать интерфейс GPIO, он предоставляет возможность управления любыми устройствами: от лампочки до сложных систем умного дома. В случае с flipper zero этот порт предназначен не столько для управления, сколько для считывания сигналов, поступающих на вход или выход. Тем не менее, подключение сторонних устройств возможно, таких как клавиатура и мышь, более сильная антенна или полноценная вычислительная машина (однако для такого подключения накладываются дополнительные требования на программное обеспечение ЭВМ).

Второй вариант подключения к другим электронным устройствам является интерфейс USB, который значительно проще в использовании.

Сочетание этих двух интерфейсов делают Flipper zero крайне универсальным и гибким устройством в умелых руках.

В качестве запоминающего устройства на плате STM32WB55RG используется статическая оперативная память с размером в 256 КБ и флеш-память на 1024 КБ.

Поскольку основным предназначением Flipper Zero является тестирование на проникновение и оценка безопасности устройств, взаимодействующих с радиоволнами, в нём присутствуют несколько модулей для обработки радиосигналов.

Модуль трансивер CC1101 позволяет воспроизводить и записывать сигналы, меньшие 1 ГГц, которые используются во многих бытовых приборах и дистанционно-контролируемых системах, не требующих высокочастотных сигналов для работы. Большинство объектов, работающих на этой частоте, являются частью более крупных систем контроля и управления доступом. Например, гаражная дверь: если удастся скопировать сигнал открытия двери и воспроизвести его, то независимо от этого сработает сигнализация. Из-за этого перехватить и повторить сигнал недостаточно. Электронные ключи и сигнализация от машин тоже работают на частотах, меньших 1 ГГц, что делает их потенциально уязвимым для подобного типа атак, но в современных автомобилях установлены системы безопасности, которые предотвращают подобные атаки.

Вторым важным компонентом Flipper zero является NFC и RFID трансивер ST25R3916, который работает на частотах от 13,56 МГц до 27,12 МГц. Протоколы NFC и RFID, поддерживаемые устройством, представлены на официальном сайте FlipperZero. Поскольку технологии NFC и RFID широко используются в банковских системах, возникает вопрос: можно ли использовать Flipper Zero для кражи данных банковских карт? С заводскими настройками – нет. С пластиковой карты возможно скопировать UID, полный номер карты, срок действия, а в некоторых случаях даже фамилию, но остаются недоступным – CVC/CVV-код, что делает невозможным использование данных карты в интернет-магазинах. Если пытаться скопировать данные из Apple Pay/Google Pay или других электронных платёжных систем, то невозможно получить даже номер банковской карты. Банковские карты обладают защитой от replay-атак, поэтому использовать повторители сигнала для оплаты в POS терминале не представляется возможным.

Тем не менее, различные протоколы RFID и NFS используются различными компаниями при организации систем контроля и управления доступом (различные карты доступа). И такие системы крайне уязвимы к копированию. Как и в предыдущем случае, такие ключи используются в составе больших систем, и вычислить злоумышленника в случае использования украденного кода довольно легко.

Третьим компонентом выступает устройство Bluetooth версии 5.4 с низким энергопотреблением и скоростью обмена данными до 2 МБ/с.

Также есть возможность подключения двух micro SD карт размером до 256 ГБ при помощи последовательного интерфейса SPI.

Для взаимодействия с устройствами, использующими инфракрасное приёмопередатчик, в Flipper Zero предусмотрен инфракрасный передатчик, обладающий характеристиками, представленными на рис. 1.

Infrared 	RX wavelength: 950 nm (+/-100nm) RX carrier: 38 KHz (+/-5%) TX wavelength: 940 nm TX carrier: 0-2 MHz TX power: 300 mW

Рис. 1. Характеристики инфракрасного излучателя

Источник инфракрасного излучения поддерживает следующие протоколы:

- NEC family;
- Kaseikyo;
- RCA;
- RC5, RC6;
- Samsung;
- SIRC.

Инфракрасный передатчик может использоваться для атак или манипуляций различными устройствами, включая некоторые модели телевизоров, проекторов и других электронных девайсов. Старые или недостаточно защищенные модели телевизоров могут быть уязвимы для атак при помощи инфракрасного луча путем подачи фальшивых команд.

Проведенное исследование потенциальных рисков, связанных со свободным распространением и использованием устройства Flipper Zero, показало, что устройство не представляет серьезной опасности для общественного порядка.

Несмотря на то, что Flipper Zero является универсальным инструментом для анализа беспроводных технологий, большинство атакуемых с его помощью устройств являются частью более крупных систем контроля и управления доступом. Эти системы, как правило, имеют многоуровневую защиту и более серьезные механизмы безопасности, которые значительно снижают риски успешного несанкционированного вмешательства с использованием Flipper Zero.

Тем не менее, необходимо продолжить мониторинг ситуации и своевременно реагировать на любые выявленные злоупотребления устройством. Следует также проводить информационно-просветительскую работу, направленную на повышение осведомленности пользователей о правомерном использовании Flipper Zero и ответственном отношении к его эксплуатации [1–3].

Список литературы

1. URL: <https://habr.com/ru/articles/422551/> (дата обращения: 10.03.2024).
2. URL: <https://flipperzero.one> (дата обращения: 10.03.2024).
3. URL: <https://habr.com/ru/companies/flipperdevices/articles/571838> (дата обращения: 10.03.2024).

МАТЕМАТИКА В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Татьяна Вячеславовна Черушева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

tank1100@yandex.ru

Аннотация. Обосновывается важность математической подготовки будущих специалистов в области электротехники и электроэнергетики.

Ключевые слова: электротехника и электроэнергетика, энергия, электрические цепи, матрица, производные, интегралы, дифференциальные уравнения, ряды

MATHEMATICS IN ELECTRIC POWER INDUSTRY

Tatyana V. Cherusheva

Penza State University, Penza, Russia

tank1100@yandex .ru

Abstract. The article substantiates the importance of mathematical training of future specialists in the field of electrical engineering and power engineering.

Keywords: electrical engineering and power engineering, energy, electrical circuits, matrix, derivatives, integrals, differential equations, series

В современном мире электротехника и электроэнергетика играют важную роль в обеспечении повседневного комфорта и развития промышленности.

Обучение студентов математике по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» в Пензенском государственном университете направлено на овладение математическими методами, необходимыми для развития энергетической сферы.

Что же изучают студенты, обучающиеся по профилю «Электроэнергетические системы и сети»? Во-первых, элементы алгебры и аналитической геометрии. Студенты прежде всего знакомятся с комплексными числами. Это важный математический инструмент для анализа переменных токов и напряжений в электрических цепях. С их помощью удобно описывать фазовые отношения, реактивные компоненты и другие характеристики электрических сигналов.

Матрицы и определители используются при анализе сложных систем с большим количеством переменных. С их помощью можно ком-

пактно представлять данные о сетях передачи электроэнергии, а также проводить вычисления и оптимизацию работы энергетических систем.

Математические модели многих задач энергетики удобно формулировать и исследовать в матричной записи. Следовательно, необходимо в программе изучения математики дать основные операции линейной алгебры: транспонирование, сложение и умножение матриц, скалярные произведения и вычисление евклидовой нормы (длины) векторов.

В энергетике распространено математическое описание установившегося режима электрической сети в виде системы уравнений узловых балансов токов (или мощностей). Известными в этих уравнениях являются проводимости ветвей и мощности нагрузок всех узлов (кроме балансирующего), а неизвестными переменными – величины узловых напряжений. В этом случае система уравнений установившегося режима становится линейной и имеет вид

$$YU = I, \quad (1)$$

где Y – матрица проводимостей схемы замещения электрической сети;

I – вектор задающих токов нагрузки;

U – искомый вектор узловых напряжений.

В случае задания энергетической нагрузки в сети источников и потребителей тока электрическая сеть в установившемся режиме может быть описана методом узловых напряжений системой линейных алгебраических уравнений [1]:

$$Y_y U_{\nabla} = \sqrt{3}J - Y_6 U_6, \quad (2)$$

где Y_y – матрица узловых проводимостей сети;

U_{∇} – вектор-столбец неизвестных значений напряжений в узлах относительно напряжения балансирующего узла;

J – вектор-столбец задающих токов;

Y_6 – вектор-столбец проводимостей к балансирующему узлу;

U_6 – напряжение балансирующего узла.

Матрица узловых проводимостей может быть формально определена через первую матрицу инцидентий в соответствии с формулой $Y_y = MZ^{-1}M_t$.

Таким образом, студенты должны уметь решать системы линейных алгебраических уравнений методами Крамера, матричным и Гаусса.

Способы решения систем линейных уравнений в основном разделяются на две группы:

1) точные методы, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (таковы, например, правило Крамера, метод Гаусса, метод главных элементов и др.);

2) итерационные методы, позволявшие получить корни систем с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов (к числу их относятся метод итерации, метод Зейделя, метод релаксации и др.). Эти методы требуют знаний дифференцирования функций одного и многих переменных.

Математический анализ играет важную роль в электротехнике, обеспечивая теоретическую базу для понимания физических процессов, лежащих в основе работы электроэнергетических систем. Он позволяет анализировать функции, производные, интегралы и другие математические концепции, необходимые для понимания поведения систем.

Как известно, под электрическим током понимают направленное движение свободных электрически заряженных частиц. Количественной характеристикой электрического тока является сила тока. В цепи электрического тока электрический заряд меняется с течением времени по закону $q = q(t)$. Сила тока I есть производная заряда $q(t)$ по времени. В электротехнике в основном используется работа переменного тока. Получение переменного электрического тока основано на законе электромагнитной индукции, формулировка которого содержит производную магнитного потока.

При анализе стабильности электрических систем необходимо оценивать пределы функций передачи и устойчивости системы. Понимание свойств функций позволяет более глубоко изучать поведение систем электроснабжения и принимать обоснованные решения при их проектировании и эксплуатации.

При расчете мощности в электрических цепях необходимо интегрировать функции напряжения и тока по времени. Интегралы используются для определения энергии, передаваемой по линиям электропередачи, а также для анализа электрических сетей в стационарном режиме. Например, суммарная электрическая нагрузка промышленного района [2] складывается в основном из нагрузки, связанной с обеспечением потребителя электроэнергией для производственных целей, привода двигателей железнодорожного и городского транспорта и нагрузки, связанной с расходом энергии на освещение и бытовые нужды. Суточная выработка электрической энергии, кВт·ч/сут, определяется по формуле $\mathcal{E}_{\text{сут}} = \int_0^{24} N(t) dt$, где $N(t)$ - суточная нагрузка.

Использование интеграла Дюамеля

$$i(t) = i(0)g(t) + \int_0^t u'(t)g(t - \tau)d\tau \quad (3)$$

способствует определению любого физического параметра электрической цепи, к которым относится и напряжение. При этом в (3) вместо

переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция по напряжению $h(t)$.

Современный инженер-электротехник должен превосходно владеть методами интегрирования для решения конкретных практических задач в своей профессиональной сфере. Например, к ним относятся определение технических характеристик устройств, разработка математической модели электрической станции, расчёт переходных процессов интегралом Дюамеля, определение величины допустимого тока нагрузки интегралом Джоуля и т.д.

Нельзя обойти вниманием и ряды. Ряды Фурье используются для анализа периодических сигналов и расчета спектральных характеристик электрических сигналов. Ряды также используются для аппроксимации сложных функций, что позволяет упростить математические модели систем электроснабжения.

Электротехника имеет дело с сигналами, которые являются функциями времени – электрическими колебаниями различной формы. Основные процессы, протекающие в электронных цепях, легче понять на примере простых сигналов. Разложение в ряд Фурье заключается в том, что любое колебание сложной формы заменяется суммой синусоидальных колебаний с определенными амплитудами и фазами [3].

В качестве примера рассчитаем активную мощность, выделяемую на элементах цепи (рис. 1) с источником несинусоидального напряжения, с помощью рядов Фурье. Номиналы элементов на схеме: $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом}$, $C = 10 \text{ мкФ}$, $L = 10 \text{ мГн}$. Ряд Фурье в этом случае имеет вид:

$$f(x) = U_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

Пусть источник несинусоидального ЭДС имеет форму сигнала, представленного на рис. 2. Вычислим значения коэффициентов: $U_0 = 10 \text{ В}$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{10}{\pi n}$. По найденным амплитудам гармоник можно воссоздать исходную функцию и спектральную диаграмму, представленные на рис. 3, 4 соответственно.

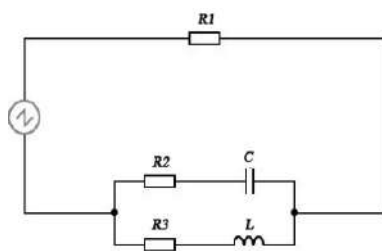


Рис.1. Принципиальная схема

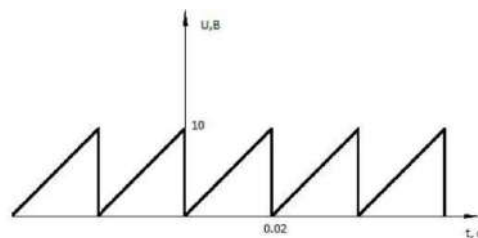


Рис. 2. График функции

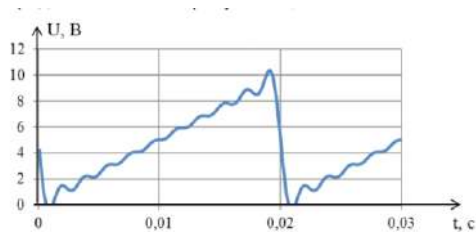


Рис. 3. Аппроксимация заданной функции

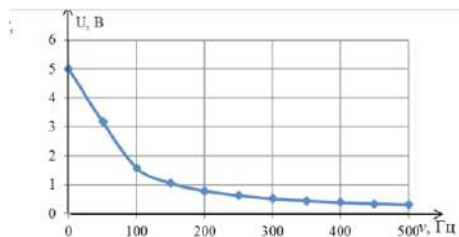


Рис. 4. Спектральная диаграмма амплитуд гармоник

Активная мощность на n -ой гармонике имеет вид $P_n = U_n I_n \cos \varphi_{zn}$. Суммарная активная мощность будет равна $P = 1,032$ Вт.

Дифференциальные уравнения, которые широко используются для описания динамики систем электроснабжения, требуют понимания процессов дифференцирования функций. В электротехнике дифференциальные уравнения применяются для описания динамики систем, включая электрические цепи, электромеханические системы и другие. Решение дифференциальных уравнений позволяет предсказать поведение системы во времени и оптимизировать их работу.

Например [1], требуется с помощью ряда Тейлора найти решение дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{x+1}$ при $y(0) = 0$ в виде алгебраического выражения. Решение имеет вид $y \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{(n-1)}}{n}x^n$.

Достоинство такого метода заключается в возможности получения аналитического решения.

Недостатки в том, что

- 1) переменные должны быть разделены;
- 2) зависимость должна быть дифференцируема достаточно высокое число раз, и требуется брать и вычислять производные высоких порядков;
- 3) погрешность решения очень мала для начала интервала и резко возрастает у конца, т.е. погрешность неравномерна на всем интервале решения.

Более эффективными являются приближенные методы: метод Эйлера и модифицированный метод Эйлера, метод Рунге-Кутты второго и четвертого порядка. Методы просты, но имеют погрешности, особенно метод Эйлера. Поэтому студентам необходимо давать начала теории погрешностей и приближенные методы решения дифференциальных уравнений.

Как видим, математика играет важную роль в подготовке специалистов в области электротехники и электроэнергетики. Инженер,

являясь специалистом в узкой области, обязан базировать свои знания на прочном фундаменте математических и естественных наук [4, 5].

Список литературы

1. Математические задачи в электроэнергетике : метод. указания / сост. С. Н. Медведева. Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. 56 с.
2. URL: https://lms.kgeu.ru/pluginfile.php?file=%2F396474%2Fmod_resource%2Fcontent%2F3%2F%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D1%83%D0%BB%D1%8C%203%20%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F%203.3..pdf (дата обращения: 04.02.2024).
3. Прохоров И. Б., Гребенщиков П. А., Моисеев В. С., Мубаракшин А. Р. Применение рядов Фурье в электротехнике // Национальная ассоциация ученых (НАУ). 2015. № 10-2 (16). С. 108–110.
4. Агафонов М. В. Применение интегрального исчисления в электротехнике // Технические науки. Интеллектуальный потенциал XXI века: ступени познания. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-integralnogo-ischisleniya-v-elektrotehnike> (дата обращения: 04.02.2024).
5. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I. [et al.]. Nonlinear systems of volterra equations with piecewise smooth kernels: numerical solution and application for power systems operation // Mathematics. 2020. № 8 (8). P. 1257. URL: <https://doi.org/10.3390/math8081257> (дата обращения: 04.02.2024).

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Татьяна Вячеславовна Черушева¹,
Мухаммадбунёд Дилшодович Исмоналиев²,
Саид Максудович Сатторов³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹tank1100@yandex.ru, ²ismonalievmuhammad51@gmail.com,

³saidstatorov200@gmail.com

Аннотация. Определена роль математики в подготовке специалистов, планирующих работать в энергетической сфере государств Средней и Центральной Азии. Студенты должны знать определенные разделы математики, без которых развитие энергетики их государств невозможно.

Ключевые слова: комплексные числа, переменный ток, ЭДС, напряжение, фаза

THE ROLE OF MATHEMATICS IN TRAINING SPECIALISTS IN THE FIELD OF ELECTRICAL ENGINEERING AND POWER ENGINEERING

Tatyana V. Cherusheva¹, Muhammadbuned D. Ismonaliev²,
Said M. Sattarov³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹tank1100@yandex.ru, ²ismonalievmuhammad51@gmail.com,

³saidstatorov200@gmail.com

Abstract. The article is intended to determine the role of mathematics in the training of specialists planning to work in the energy sector of the countries of Central and Central Asia. Students must know certain branches of mathematics, without which the development of the energy sector in their states is impossible.

Keywords: complex numbers, alternating current, emf, voltage, phase

Экономическая политика Республики Таджикистан направлена на достижение трех важных стратегических целей на ближайшую перспективу: достижение энергетической независимости, обеспечение продовольственной безопасности и освобождение от транспортной изоляции.

Таджикистан обладает значительным потенциалом в области гидроэнергетики, который ещё мало реализован. Общий объём гидро-

энергоресурсов оценивается в 527 млрд кВт·ч, в том числе технически возможный к использованию составляет 202 млрд кВт·ч, а экономически целесообразный к строительству – 172 млрд кВт·ч.

Парк мощностей электростанций Таджикистана:

- Нурекская ГЭС – мощность [3] 3000 МВт.
- Сангтудинская ГЭС-1 – мощность 670 МВт.
- Байпазинская ГЭС – мощность 600 МВт.
- Рогунская ГЭС – мощность 600 МВт. (запуск первый агрегат).
- Душанбинская ТЭЦ-2 – мощность 400 МВт.
- Главная ГЭС – мощность 240 МВт.
- Сангтудинская ГЭС-2 – мощность 220 МВт.
- Душанбинская ТЭЦ – мощность 198 МВт.
- Кайраккумская ГЭС – мощностью 126 МВт.
- Яванская ТЭЦ – мощность 120 МВт.
- Перепадная ГЭС – мощность 29,9 МВт.
- Центральная ГЭС – мощность 15,1 МВт.
- Варзобский каскад из ГЭС Варзоб-1, -2 и -3 на р. Душанбе-Дарья общей мощностью 25,7 МВт.
- Несколько десятков малых (мощностью до 1,5 МВт) и микроГЭС (мощностью до 0,1 МВт).

Страна экспортирует электроэнергию в Узбекистан, Кыргызстан и Афганистан. Идёт строительство огромного и самого высокого в мире ГЭС «Рогун». После сдачи в эксплуатацию страна будет экспортировать энергию в Пакистан.

Для студентов, приехавших из Таджикистана на обучение в Пензенский государственный университет (ПГУ) по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» по профилю «Электроэнергетические системы и сети», важно получить качественное математическое образование. Обучению в вузе предшествует «домашняя» школьная подготовка, которая включает в себя знание русского языка и математики в школьном объёме.

Решая профессиональные задачи на местах, выпускники ПГУ должны использовать определённый математический аппарат: матрицы, векторы, производные, интегралы, ряды. Например, по линейной алгебре студенты изучают комплексные числа, матрицы. В том числе транспонирование, сложение матриц, умножение матриц на число, произведение матриц, вычисление обратной матрицы. Эти знания потребуются им при изучении установившегося режима электрической сети в виде системы уравнений узловых балансов токов (или мощностей).

Комплексные числа используются для упрощения расчетов переменных токов и напряжений, а также для анализа фазовых сдвигов, импедансов, резонансов и других явлений в электрических цепях.

При расчетах цепей приходится проводить математические операции с комплексными числами, поэтому студенты должны уметь выполнять следующие операции:

- 1) находить модуль и аргумент комплексного числа и комплексное число по модулю и аргументу;
- 2) переводить комплексное число из одной формы в другую;
- 3) производить сложение и вычитание, умножение и деление комплексных чисел [1].

Помимо этого очень важно научить строить кривую и вектор по уравнению синусоиды, вектор по комплексному числу, определять комплексное число по вектору и уравнению, уравнение по комплексному числу [2].

В электротехнике тема «Переменный ток» занимает значительное место. Это объясняется тем, что большинство электротехнических установок работает на переменном токе, меняющемся по синусоидальному закону [4, 5]. Уравнение переменного напряжения имеет вид

$$u = U_M \sin(Wt + \psi),$$

где u – мгновенное значение напряжения; U_M – максимальное значение (амплитуда) напряжения; w – угловая частота; t – время; ψ – начальный фазовый угол; $wt = \alpha$ – электрический угол. Это уравнение связывает две переменные величины: напряжение u и время t . С течением времени напряжение изменяется синусоидально. Аналогичный вид имеют уравнения и других синусоидально изменяющихся величин: тока, ЭДС и т.д. При расчете цепей переменного тока приходится использовать синусоидально изменяющиеся величины, т.е. производить сложение, вычитание, умножение и деление уравнений указанного выше типа. И здесь приходят на помощь комплексные числа.

Комплексное число может быть изображено на плоскости вектором, длина которого равна модулю комплексного числа, а угол наклона – аргументу. В электротехнике мнимая единица обозначается буквой j . Если имеется комплексное число $A = a + jb$, то его можно представить вектором, где $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа; $\arctg \frac{b}{a} = \alpha$ – аргумент комплексного числа. Комплексное число имеет три формы записи: алгебраическую, тригонометрическую и показательную. Между комплексными числами и векторами можно установить взаимно однозначное соответствие. Таким образом, если переменная синусоидальная величина представляется вектором, а конкретному вектору соответствует определенное комплексное число, то переменная синусоидальная величина может быть представлена комплексным числом. Такие величины, как напряжение, ток, сопротивление, проводимость, мощность выражаются комплексными числами. Синусоидальная величина однозначно представлена вращающимся вектором, длина которого равна

амплитуде, а начальное положение определяется углом ψ . Вращение вектора происходит с угловой скоростью ω . Операции производятся с величинами, имеющими одинаковую угловую частоту, то есть все векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью. Следовательно, их взаимное расположение не меняется, отпадает необходимость вращение векторов. Сложение или вычитание синусоидальных величин можно заменить сложением или вычитанием векторов.

Например, дан ток в комплексной форме $\dot{I} = 3 - 4j$. Написать уравнение тока. Для того чтобы написать уравнение, надо знать амплитуду и начальный фазовый угол: $I = 5\text{А}$, $\psi = -53^\circ$, $I_M = I\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = 7,07\text{ А}$. Тогда $i = I_M \sin(\omega t + \psi) = 7,07 \sin(\omega t - 53^\circ)$.

Дифференцирование комплексного тока

$$d/dt(i) = d/dt(I_M e^{j(\omega t + \psi)}) = I_M j \omega e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{I} j \omega$$

сводится к растяжению $\dot{I}(t)$ в ω раз и повороту его на 90° в положительном направлении (против часовой стрелки). Интегрирование даёт $\int \dot{I}(t) dt = \int (I_M e^{j(\omega t + \psi)}) dt = -j \dot{I} / \omega$. Поэтому этот вектор получается сжатием вектора $\dot{I}(t)$ в ω раз и поворотом его на 90° в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке. Положение исходного, продифференцированного и проинтегрированного токов в момент времени $t = 0$ показано на рисунке 1.

Таким образом, напряжение на резисторе совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на 90° , напряжение на ёмкости отстает от тока на 90° по фазе (рис. 2).

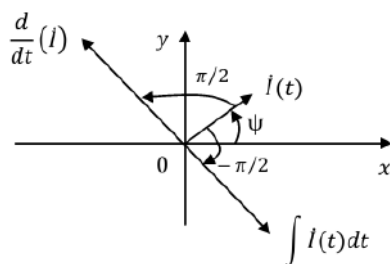


Рис. 1. Диаграмма токов

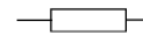
Вид элемента	Формула для расчета падения напряжения
 R	$U_R = R \cdot I(t)$
 L	$U_L = L \frac{d}{dt} I(t)$
 C	$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt$

Рис. 2. Связь между $I(t)$, R, C, L

Дифференциальным уравнением гармонических колебаний является уравнение

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \omega_0^2 g = 0, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Следовательно, будущие энергетики должны уметь решать дифференциальные уравнения и проводить анализ полученного решения.

Преобразование Фурье позволяет представить непрерывную функцию $f(x)$ (сигнал), определенную на отрезке $[0, T]$ в виде суммы бесконечного ряда тригонометрических функций (синусоид и/или косинусоид) с определёнными амплитудами и фазами, также рассматриваемых на отрезке $[0, T]$. Такой ряд называется рядом Фурье:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$|A_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} = \alpha_k,$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = A(\omega) e^{j\omega t}.$$

Таким образом, мы получаем амплитудно-частотную $A(\omega)$ (АЧХ) и фазо-частотную $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Im(F(j\omega))}{\Re(F(j\omega))}$ (ФЧХ) характеристики. В математической теории линейных стационарных систем АЧХ устойчивой системы вычисляется как зависимость модуля комплексной передаточной функции от частоты. Значение АЧХ на некоторой частоте указывает, во сколько раз амплитуда сигнала этой частоты на выходе системы отличается от амплитуды выходного сигнала на другой частоте.

Спектр мощности представляет собой амплитудный спектр, возведенный в квадрат.

При изучении методов компьютерного моделирования режимов работы систем электроэнергетики, статической и динамической устойчивости системы требуется знание математического аппарата аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одного переменного, необходимых для решения задач профессиональной деятельности. Необходимо знать теорию функций нескольких переменных, функций комплексного переменного, рядов, дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Шмидт Н. М. Приложение комплексных чисел в электротехнике // Молодой ученый. 2012. № 2 (37). С. 320–323. URL: <https://moluch.ru/archive/37/4252/> (дата обращения: 11.05.2024).
2. Шубович А. А., Перевозкина Ю. М. Постановка и решение математических задач в области электроэнергетики : учеб. пособие. Волгоград : Волгоград. ГАУ, 2019. 124 с. // Лань : электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/book/139225> (дата обращения: 11.05.2024).
3. Кормилицын Д. Н., Мешкова Ю. С. Математические задачи электроэнергетики. Иваново : ИГЭУ, 2020. 136 с. // Лань: электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/book/296108> (дата обращения: 11.05.2024).

4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. 8-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. шк., 1984. 559 с.

5. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I. [et al.]. Nonlinear systems of volterra equations with piecewise smooth kernels: numerical solution and application for power systems operation // Mathematics. 2020. № 8 (8). P. 1257. URL: <https://doi.org/10.3390/math8081257>

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РЕГИОНОВ ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

Ангелина Денисовна Яковлева¹,
Татьяна Вячеславовна Черушева²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹gelya.yakovleva.2001@bk.ru, ²tank1100@yandex.ru

Аннотация. В настоящее время каждый регион задается вопросом своей инвестиционной привлекательности, так как привлечение инвестиций способствует повышению уровня жизни населения, увеличению заработной платы, созданию новых рабочих мест, привлечению туристов, увеличению валового регионального продукта (ВРП) и другим положительным аспектам, которые характерны как для региона, так и для страны в целом. На основе официальных статистических данных о социально-экономическом развитии регионов Приволжского федерального округа проведен анализ современного состояния и динамики инвестиционных процессов.

Ключевые слова: анализ, структура, инвестиционная привлекательность, инвестиционная деятельность, инвестиции в основной капитал, Приволжский федеральный округ

COMPARATIVE ANALYSIS OF INVESTMENT ACTIVITY IN THE REGIONS OF THE VOLGA FEDERAL DISTRICT

Angelina D. Yakovleva¹, Tatyana V. Cherusheva²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹gelya.yakovleva.2001@bk.ru, ²tank1100@yandex.ru

Abstract. Currently, each region is wondering about its investment attractiveness, since attracting investments contributes to improving the standard of living of the population, increasing wages, creating new jobs, attracting tourists, increasing the gross regional product (GRP) and other positive aspects that are characteristic of both the region and the country as a whole. Based on official statistical data on the socio-economic development of the regions of the Volga Federal District, an analysis of the current state and dynamics of investment processes is carried out.

Keywords: analysis, structure, investment attractiveness, investment activity, investments in fixed assets, Volga Federal District

Введение

Активная инвестиционная деятельность субъекта Российской Федерации является обязательным условием его развития, а привлечение инвестиций в регион – одна из ключевых задач, стоящих перед современным обществом и государством.

Для Приволжского федерального округа характерны региональные различия в экономическом развитии, концентрация капитала в наиболее развитых промышленных центрах и неравномерное распределение инвестиций между регионами.

Приволжский федеральный округ (ПФО) – один из восьми федеральных округов Российской Федерации, занимающий ключевые позиции в производственной деятельности страны благодаря своему выгодному транспортно-географическому положению. Территория округа более 1 млн кв. километров, что составляет около 6 % территории всей страны. Здесь проживает более 19 % населения, то есть более 29 млн человек. Это второе место среди федеральных округов России после Центрального федерального округа. В состав ПФО входят 14 субъектов Российской Федерации [3].

В данном исследовании проведен сравнительный анализ инвестиций в основной капитал Приволжского федерального округа за 2000–2023 годы¹ [2, 4].

ПФО по объему инвестиций в основной капитал занимает 3-е место среди федеральных округов. Совокупный объем инвестиций в основной капитал в ПФО составил 43 трлн 852 млрд руб. (рис. 1).

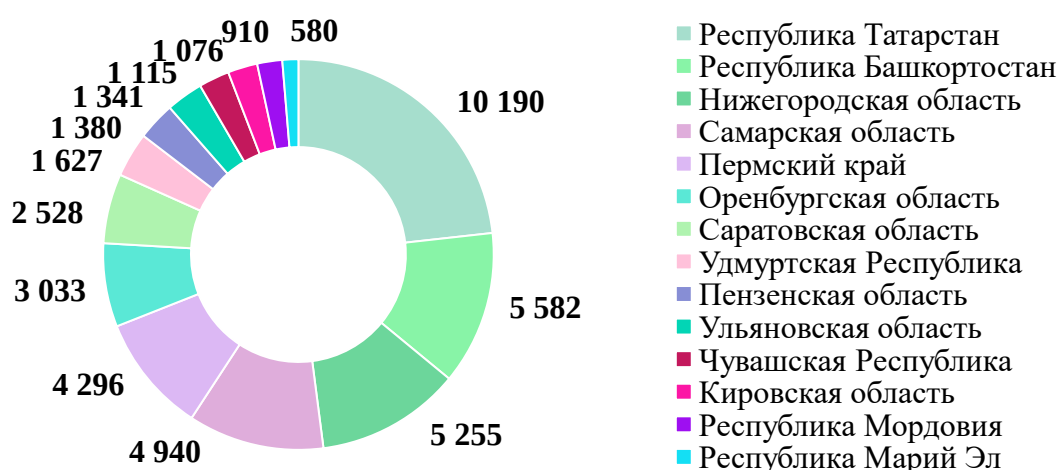


Рис. 1. Суммарный объем инвестиций по регионам ПФО за 2000–2023¹ гг., млрд руб.

¹ Данные за 2023 г. будут утверждены и опубликованы не ранее 27.12.2024.

Суммарный объем инвестиций Республики Татарстан (10 190 млрд руб.) за период с 2000–2023¹ гг. составляет 23,2 % от капиталовложений ПФО и превышает за рассматриваемый промежуток времени показатель Республики Марий Эл более чем в 17 раз.

Республика Башкортостан – 12,7 % от общего объема инвестиций, Нижегородская и Самарская области (12,0 и 11,3 соответственно), Пермский край (9,8), Оренбургская область (6,9), Саратовская область (5,8), Удмуртская Республика (3,7), Пензенская и Ульяновская области (3,2 и 3,1 соответственно), Чувашская Республика (2,5), Кировская область (2,4 %). Замыкают рейтинг Республика Мордовия (2,1 %) и Республика Марий Эл (1,3 %).

Средняя величина объема инвестиций за указанный временной отрезок в Поволжье составила 1 трлн 827 млрд руб. Диаграмма средней величины объема инвестиций в основной капитал в разрезе регионов представлена на рис. 2.

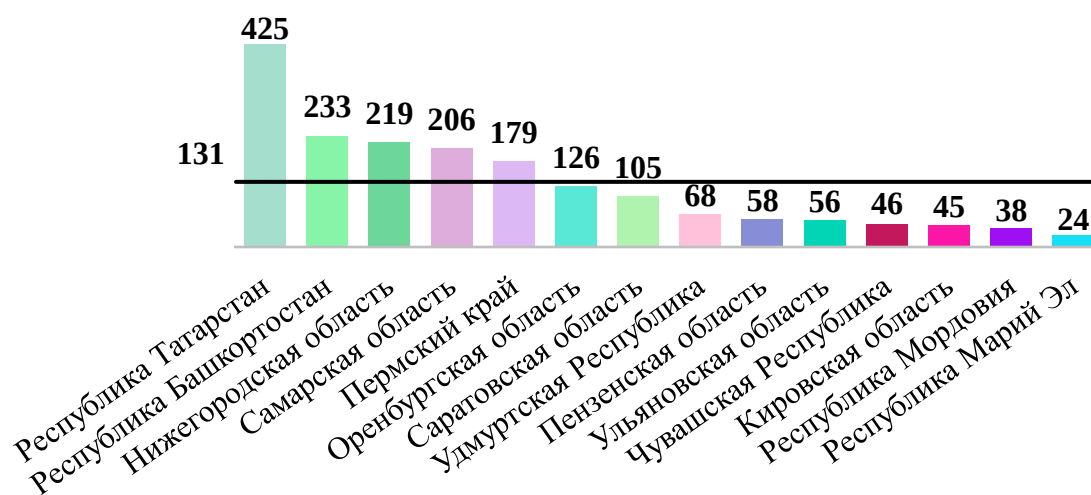


Рис. 2. Средняя величина объема инвестиций по регионам ПФО за 2000–2023¹ гг., млрд руб.

Средние показатели пяти регионов: Республики Татарстан, Республики Башкортостан, Нижегородской и Самарской областей, Пермского края превышают выборочную среднюю (131 млрд руб.), что говорит о неравномерности распределения инвестиций в основной капитал по регионам.

Объемы инвестиционных вложений в экономику Республики Татарстан в разы превышают остальные регионы Поволжья. Республика Башкортостан, сохраняя за собой долгое время второе место, два последних года уступает его Нижегородской области. Пермский край

¹ Данные за 2023 г. будут утверждены и опубликованы не ранее 27.12.2024.

и Самарская область занимают четвертое и пятое места. Стоит отметить, что в 2014 году Пермский край был вторым после Татарстана. На шестом и седьмом местах в ПФО – Оренбургская и Саратовская области (рис. 3).

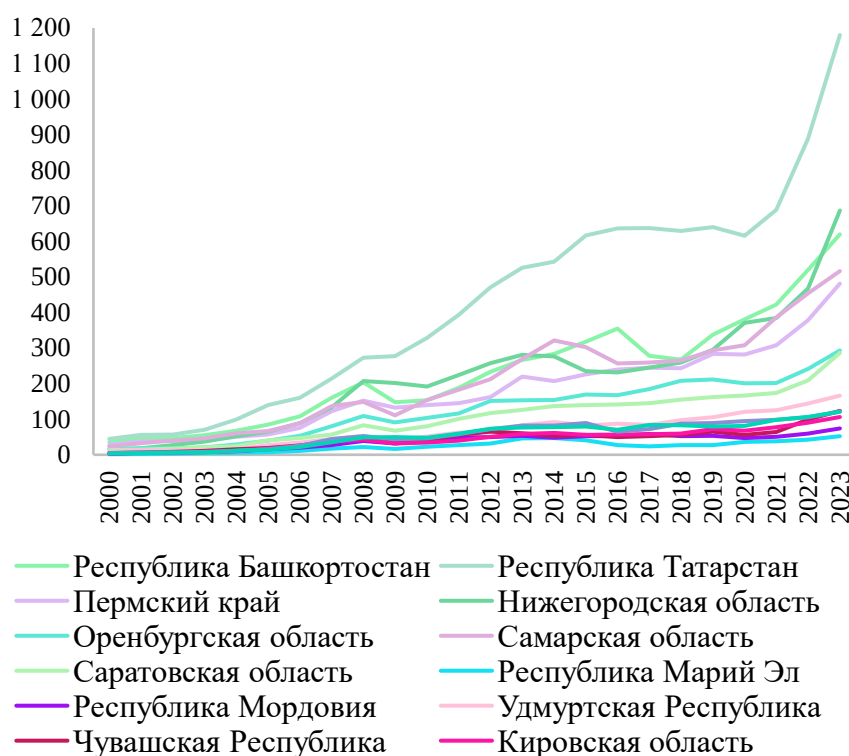


Рис. 3. Динамика инвестиций в основной капитал в разрезе регионов ПФО, за 2000–2023¹ гг., млрд руб.

На протяжении рассматриваемого периода инвестиционные показатели второй семерки находятся примерно на одном уровне.

Стоит отметить, что с 2018 года стабильно на восьмом месте находится Удмуртская Республика.

В инвестиционном рейтинге 2023¹ года оставшиеся регионы распределились следующим образом: Чувашская Республика, Пензенская, Ульяновская, Кировская области, Республики Мордовия и Марий Эл.

Для более подробного изучения инвестиционных вложений в экономику регионов ПФО рассмотрим объем инвестиций в основной капитал на душу населения.

По показателю объема инвестиций в основной капитал на душу населения лидирующую позицию в ПФО занимает Республика Татарстан. Места со второго по шестое в 2023¹ году распределились следующим образом: Нижегородская область, Пермский край, Самарская, Оренбургская области, Республика Башкортостан. Саратовская область с 2002 года не поднималась выше 7-го места (рис. 4).

¹ Данные за 2023 г. будут утверждены и опубликованы не ранее 27.12.2024.

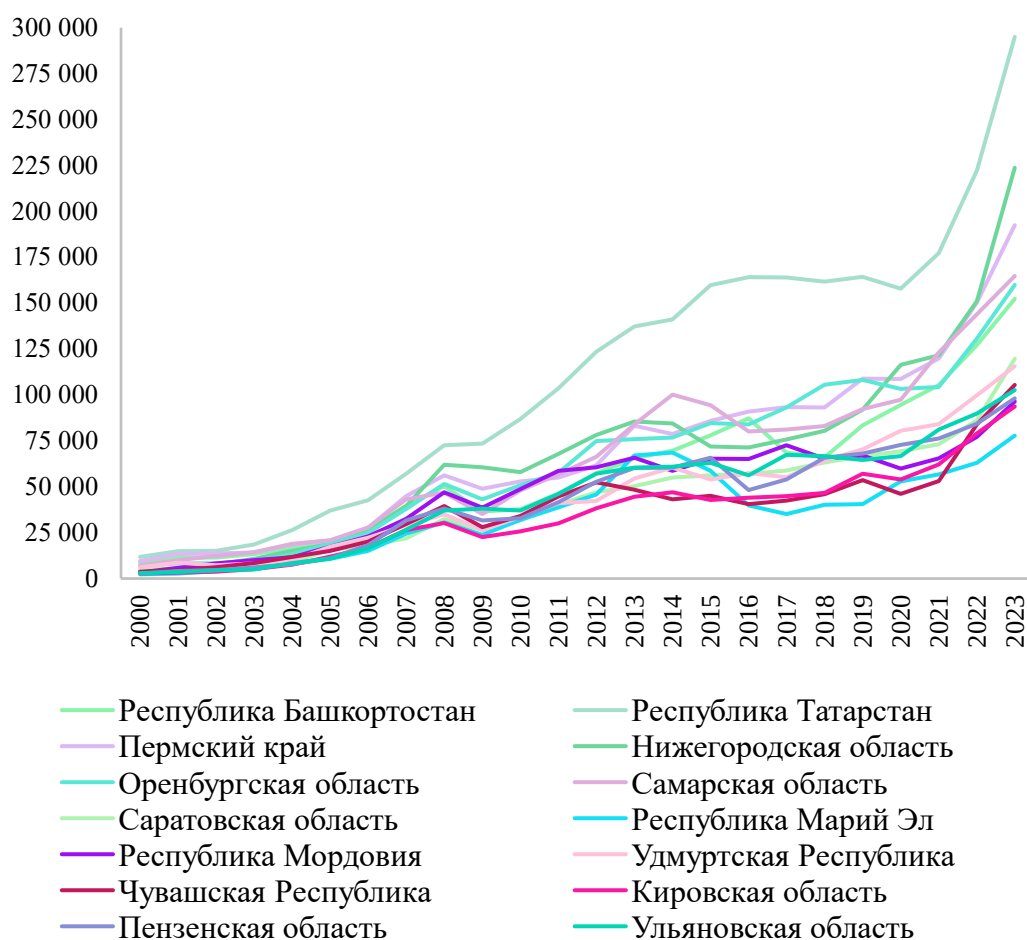


Рис. 4. Инвестиции в основной капитал на душу населения в разрезе регионов ПФО за 2000–2023¹ гг., руб.

Затем места по объему инвестиций на душу населения распределились следующим образом: Удмуртская, Чувашская Республики, Ульяновская, Пензенская области, Республика Мордовия, Кировская область и Республика Марий Эл.

В 2023¹ году показатель инвестиций на душу населения в ПФО составил 168,8 тыс. руб. [1]. Анализ неравномерности инвестиционных процессов в разрезе регионов ПФО представлен в табл. 1.

Приволжский федеральный округ имеет большой потенциал развития. Инвесторам следует обратить внимание на регионы с малым уровнем инвестиций в основной капитал, так как эти территории мало заполнены конкурентами. В результате инвестирования появится возможность в будущем получить значительный положительный эффект в виде увеличения прибыли для инвестора и улучшения социального уровня жизни для регионов в целом.

¹ Данные за 2023 г. будут утверждены и опубликованы не ранее 27.12.2024.

**Индекс отклонений среднедушевых инвестиций регионов
от средней величины показателя по ПФО в 2023¹ году**

Регион	Инвестиции на душу населения, руб.	Инвестиции на душу населения по ПФО, руб.	Индекс отклонения среднедушевых инвестиций
Республика Башкортостан	152 301	168 816	0,90
Республика Марий Эл	77 827	168 816	0,46
Республика Мордовия	96 397	168 816	0,57
Республика Татарстан	294 941	168 816	1,75
Удмуртская Республика	115 629	168 816	0,68
Чувашская Республика	105 438	168 816	0,62
Пермский край	192 425	168 816	1,14
Кировская область	93 680	168 816	0,55
Нижегородская область	223 677	168 816	1,32
Оренбургская область	159 895	168 816	0,95
Пензенская область	98 124	168 816	0,58
Самарская область	164 761	168 816	0,98
Саратовская область	119 638	168 816	0,71
Ульяновская область	102 621	168 816	0,61

Список литературы

1. Васильевский А. Б. Об оценке инвестиционных процессов в экономике регионов // Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2015. Т. 1, № 3. С. 164–171.
2. Виноградова Е. П. Некоторые аспекты региональной структуры инвестиций // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD-2021) : тр. 14-й Междунар. науч. конф. М. : ИПУ РАН, 2021. С. 221–227.
3. Жугалев И. И. Анализ инвестиционной привлекательности регионов Приволжского федерального округа : сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. / под общ. ред. Н. М. Тюкавкина. Самара, 2022. С. 90–93.
4. Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики (статистические издания). URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (дата обращения: 02.04.2024).

СОДЕРЖАНИЕ

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Галиакберов Р. Р., Орлов С. С., Сидоров Д. Н. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ	3
Нестеров В. О. РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СИСТЕМЕ АКУСТИЧЕСКИ МЯГКИХ ЭКРАНОВ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА	7
Скворцов О. С. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ	12
Висков И. А., Стекланников Д. А., Скибицкая Н. Ю. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ	18
Чалышов Г. В. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ	24
Терехин Н. И. ДВУХМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СИСТЕМОЙ НЕПЛОСКИХ ЭКРАНОВ	28

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Белоус С. О. ПОЛИНОМЫ, НАИМЕНЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИКАХ	33
Бугорков М. Д. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В-СПЛАЙНОВ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ	38
Голованов С. И., Грозная Е. В. ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЕ И СГЛАЖИВАЮЩИЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ	43
Лезина А. В., Тында А. Н. СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	50
Липатов Е. С. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ	55

Якунина А. А. ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ	59

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Тарасов Д. В., Лапкин В. В. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MATLAB	63
Соловьев Д. Д., Буданов К. М. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ГАВРИЛЬЯКА – НЕГАМИ В СРЕДЕ MATLAB	69
Антипина Е. Д. НЕКОТОРЫЙ КЛАСС ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЯДЕР ВОЛЬТЕРРА	73
Казакова И. С., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА	80
Мартынова В. Ю., Тихов С. В., Кондырев О. В. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СВЯЗАННЫХ ТЕ-ТЕ-ВОЛН В ПЛОСКОМ НЕЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ МЕТАМАТЕРИАЛОМ	86
Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	91
Нефедов М. С., Жалнин Р. В. ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	100

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, ДЕМОГРАФИИ, СОЦИАЛЬНЫХ НАУК

Калабкин Е. С., Мамедова Т. Ф. АРХИТЕКТУРА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ИЗ МЕССЕНДЖЕРА НА ПРИМЕРЕ TELEGRAM	106
Шалаева А. А. АВТОМАТИЗАЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАНА ЛЕСОНАСАЖДЕНИЙ ГОРОДСКОЙ ТЕРРИТОРИИ	111

Мамедова Т. Ф., Козлова М. В. АЛГОРИТМЫ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО.....	116
Бельдягина Е. Ю., Дмитриева А. А. ОБ ОДНОМ ИЗ МЕТОДОВ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ.....	121
Мойко И. М., Папшева Д. В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР В ЭКОНОМИКЕ: ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ	126
Черушова Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫПУСКНИКОВ-СПЕЦИАЛИСТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПЕНЗЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА	131

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

Кутыркина М. А., Мамедова Т. Ф. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛИ ФИТЦХЮ – НАГУМО ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ	137
Аюпова А. С., Захарова Ю. Ф. ОБЗОР НЕКОТОРЫХ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ	141
Гильмутдинов В. Р., Сидоров Д. Н. НЕЧЕТКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В СИСТЕМАХ С ВОЗОБНОВЛЯЕМОЙ ЭНЕРГИЕЙ: ИНТЕРВАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ	146
Скибицкая Н. Ю., Хохлов Е. С., Мартынов И. А. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОСПРИЯТИЯ МЕЛОДИИ ЧЕЛОВЕКОМ.....	150
Михайлов С. Л. ОБ УСПЕШНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ТРИСЕКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА.....	155
Максов А. А., Печерская Е. А., Семенов А. Д., Голубков П. Е., Чихрина У. С., Буренин К. Р. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МДО-ПРОЦЕССА.....	161
Макеева Г. С. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ МАГНИТНОГО НАНОКОМПОЗИТА	167

Макеева Г. С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СВЧ- И ТГЦ-ДИАПАЗОНОВ С 3D-МАССИВАМИ МАГНИТНО- ФУНКЦИОНАЛИЗИРОВАННЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК.....	180
Макеева Г. С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ И ПОРОГОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТНЫХ НАНОСТРУКТУР НА ОСНОВЕ МАССИВОВ МАГНИТНО-ФУНКЦИОНАЛИЗИРОВАННЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК.....	195
Перекусихина А. Н., Пивкина А. А. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ С УЧЕТОМ ФРАКТАЛЬНОСТИ ЗЕМЛИ	205
Писарев М. А. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВУЧЕСТИ В СРЕДЕ UNREAL ENGINE 5	211
Чернышова Т. А., Лемперт А. А., Та Вьет Чан ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ В ДИНАМИЧНЫХ СРЕДАХ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА.....	216
Язовцева О. С., Губайдуллин И. М., Кокулова А. А., Сухарев Л. А. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ СКОРОСТИ СТЕФАНОВСКОГО ПОТОКА В ПРОЦЕССЕ ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КАТАЛИЗАТОРА ГИДРООЧИСТКИ.....	223

6. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

Мамедова Т. Ф., Козлова Е. С. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СПРОСА НА ТОВАРЫ.....	230
Зорин В. Н. ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА РЕГРЕССИИ ЛАССО В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ.....	233
Лукин В. Д., Верховский М. В., Барсуков Н. И. АРХИТЕКТУРА МНОГОЦЕЛЕВОГО КОНВЕЙЕРА ДЛЯ РЕОРГАНИЗАЦИИ ИНФЕРЕНСА НЕЙРОННОЙ СЕТИ	237
Меркурьев М. И. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ САТВОOST ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕН НА КВАРТИРЫ.....	245
Меркурьев М. И. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ САТВОOST ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТОИМОСТИ АВТОМОБИЛЕЙ	250

Тимошкин М. О., Романова Е. Г. ПРЕДСКАЗАНИЕ ЦЕН ЖИЛОЙ НЕДВИЖИМОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ	255

Читоркин Е. Е. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ	267

7. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

Игошин И. В. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ ОКАЗАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ ПРИ РАБОТЕ С ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ УНИВЕРСИТЕТА	273

Наземнова Н. В. РОЛЬ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧ В ФОРМИРОВАНИИ ДЕЙСТВИЯ ПО РАСПОЗНАВАНИЮ ОБРАЗА У СТУДЕНТОВ	276

Лукин В. Д., Верховский М. В., Барсуков Н. И. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СФЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ БРОКЕРОВ СООБЩЕНИЙ.....	280

Вычугжанин М. В. ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА РАЗНОРОДНОЙ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ.....	286

Мойко И. М., Мойко Н. В., Ушкин Д. А. ИГРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ: ВЛИЯНИЕ НА ВОСПИТАНИЕ МОЛОДЕЖИ.....	291

Мойко Н. В., Мойко И. М., Ушкин Д. А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ: ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ ОНЛАЙН-ОБРАЗОВАНИЯ, ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ВОСПИТАНИЕ МОЛОДЕЖИ	296

Отставнов А. М., Григорьева Д. Д. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ И УДОБСТВА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОПУЛЯРНЫХ ПОИСКОВЫХ СИСТЕМ.....	300

Майоров А. О. НЕСТАНДАРТНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.....	307

Подольский Я. П., Родченко А. С., Зверовщикова Н. В. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ РИСКОВ СВОБОДНОГО ОБРАЩЕНИЯ УСТРОЙСТВА FLIPPER ZERO: АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ УГРОЗ ДЛЯ ОБЩЕСТВЕННОГО ПОРЯДКА	313

<i>Черушева Т. В.</i> МАТЕМАТИКА В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ.....	318
<i>Черушева Т. В., Исмоналиев М. Д., Сатторов С. М.</i> РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ	324
<i>Яковлева А. Д., Черушева Т. В.</i> СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РЕГИОНОВ ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА	330

Научное издание

**Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем (МКМ-2024)**

*Сборник статей по материалам
XVIII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 4–7 июня 2024 г.

Под редакцией
кандидата физико-математических наук,
доцента А. Н. Тынды

**Mathematical and Computer Modelling
of Natural Science and Social Problems (MCM-2024)**

*Proceedings of the Eighteen Russian Conference
with international participation*

Penza, Russian Federation, 4–7 June, 2024

Edited by
A. N. Tynda

Все материалы представлены в авторской редакции

Корректор *Н. А. Сидельникова*
Технический редактор *Р. Б. Бердникова*
Компьютерная верстка *Р. Б. Бердниковой*
Дизайн обложки *И. В. Шваревой*

Подписано в печать 18.09.2024.
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 19,9.
Тираж 36. Заказ № 394.

Издательство ПГУ.
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел./факс: (8412) 66-67-77, 66-60-49; e-mail: iic@pnzgu.ru